Cahiers pour l'Analyse

Volume Nro 10 (winter 1969) Paris

La formalisation

Jacques Brunschwig

La proposition particulière et les preuves de non-concluance chez Aristote

Formelle sans être formaliste : ainsi Lukasiewicz caractérise-t-il la logique d'Aristote, par opposition à celle des stoïciens [1]. Elle est formelle, parce que les expressions qui lui appartiennent en propre sont des lois syllogistiques, qui ne comportent aucun terme concret, mais seulement des « emplacements » pour des termes de ce genre, emplacements marqués par des symboles littéraux. La tradition aristotélicienne a identifié l'idée selon laquelle la logique est un instrument (ὄργανον) de la philosophie, et non une de ses parties (μέρος), avec l'idée selon laquelle n'appartiennent à la logique que les lois exprimées à l'aide de variables, à l'exclusion de leurs applications, c'est-à-dire des expressions où des termes concrets sont substitués aux variables [2]. La notion de forme en référence à laquelle la logique aristotélicienne peut être dite formelle est donc la « notion philosophique fort abstraite [...] de la *forme* dans son opposition à la matière [3] ». Lukasiewicz décrit ainsi les éléments caractéristiques de la forme syllogistique, définie comme ce qui reste quand on élimine la matière du syllogisme : « A la forme du syllogisme appartiennent, outre le nombre et la disposition des variables, ce qu'on appelle les constantes logiques. Deux d'entre elles, les conjonctions « et » et « si », sont des expressions auxiliaires et font partie, comme nous le verrons plus tard, d'un système logique qui est plus fondamental que celui d'Aristote [la logique propositionnelle]. Les quatre constantes qui restent, à savoir « appartenir à tout », « n'appartenir à aucun », « appartenir à quelque » et « n'appartenir pas à quelque », sont caractéristiques de la logique aristotélicienne. Ces constantes représentent des relations entre termes universels [4]. »

1. Cf. J. Lukasiewicz, *Aristotle's Syllogistic from the standpoint of modern formal logic*, 2nd ed. enlarged, Oxford, Clarendon Press, 1957, p. 15 : « The Aristotelian logic is formal without being formalistic, whereas the logic of the Stoics is both formal and formalistic. »

2. Cf. Ammonius, *In Aristotelis Analyticorum Priorum Librum I Commentarium*, ed. Wallies, Berlin, 1899, p. 10, l. 36 s., cité par Lukasiewicz, *op. cit.*, p. 13, n. 1.

3. R. Blanché, *Introduction à la logique contemporaine*, Paris, Colin, 1957, p. 18.

4. Lukasiewicz, *op. cit.*, p. 14. Il serait plus exact de dire : « appartient à tout », « n'appartient à aucun », etc. Je noterai ci-dessous ces relations à l'aide des voyelles traditionnelles *a*, *e*, *i*, et *o*.

Formelle en ce sens, la logique d'Aristote n'est cependant pas formaliste. Ce n'est toutefois pas parce qu'elle fait largement usage du langage naturel, et qu'elle ne connaît d'autres symboles que ceux dont elle se sert pour dénoter les variables de termes. L'adoption d'un symbolisme entièrement artificiel n'est en effet qu'un moyen de satisfaire l'exigence essentielle du formalisme, qui est, pour reprendre encore les termes de Lukasiewicz, la suivante : « Le formalisme requiert que la même pensée soit toujours exprimée au moyen d'une série de mots exactement la même, ordonnée d'une manière exactement la même. Quand une preuve est mise en forme d'après ce principe, nous sommes en mesure de contrôler sa validité sur la base de sa forme extérieure seulement, sans faire référence à la signification des termes employés dans la preuve [5]. » Rien n'empêche en principe de faire du langage naturel un usage formaliste; mais ce serait au prix d'une ascèse constante, difficile et fort peu économique, puisqu'il faudrait faire abstraction de la signification des termes, et leur réinventer une grammaire qui ne serait nécessairement ni tout à fait la même ni tout à fait une autre que leur grammaire naturelle; l'entreprise s'apparenterait à celle de cet inventeur qui s'était donné tant de mal pour retirer au caoutchouc son élasticité. Aristote, lui, n'emploie pas le langage naturel avec un tel luxe de précautions. Visant toujours le signifié à travers le signifiant, il s'autorise constamment des substitutions qui paraissent intuitivement évidentes, parce que substitut et substitué « veulent dire la même chose [6] », mais qui ne sont pas explicitement légitimées par des définitions et des règles *ad hoc*. L'exemple le plus net que l'on puisse en donner est précisément l'expression des relations *a*, *e*, *i*, et *o* : on sait qu'Aristote substitue librement les unes aux autres, par exemple, les expressions suivantes :

A appartient (ὑπάρχει) à tout B.
A est prédiqué (κατηγορεῖται) de tout B.
A se dit de (λέγεται) tout B.
A suit (ἀκολουθεῖ) tout B.
B est en A comme en un tout (ἐν ὅλῳ).
Tout B est A.

Cette multiplicité d'expressions interchangeables pour une même « constante logique » montre que ce qui intéresse Aristote est le signifié unique qu'il vise à travers elles. Le maniement des diverses constantes reste guidé par leur sens naturel; Aristote ne cherche pas par principe à les définir

5. Lukasiewicz, *op. cit.*, p. 16.

6. Cf. *An. Pr.* I, 39, 49 *b* 3 : δεῖ δὲ καὶ μεταλαμβάνειν ἃ τὸ αὐτὸ δύναται, ὀνόματα ἀντ' ὀνομάτων καὶ λόγους ἀντὶ λόγων καὶ ὄνομα καὶ λόγον. Lukasiewicz a tort de citer cette phrase en l'interrompant après λόγων (*op. cit.*, p. 18, n. 2), donnant aussi faussement l'impression qu'Aristote n'autorise que les échanges « words for words and phrases for phrases », alors qu'il admet aussi bien les échanges « mots pour expressions » et *vice versa*. Notons aussi qu'en commentant un exemple, quelques lignes plus bas, Aristote précise explicitement que le *signifié* des termes substituables est identique (ταὐτὸν γὰρ τὸ σημαινόμενον, 49 *b* 8).

intégralement par une grammaire si explicitement et rigoureusement formulée qu'il suffise d'en appliquer « aveuglément » les règles pour pouvoir manier correctement les signifiants des constantes. Sa logique n'est pas un calcul; la notion de forme en référence à laquelle elle peut n'être pas dite formaliste est la « notion concrète, visuelle [...] de la *forme* au sens géométrique, ou, du moins, topologique : des dessins sur une feuille, combinés selon certaines règles, et susceptibles d'être transformés en tels dessins nouveaux selon certaines autres règles [7]. »

*

Décrire les effets de cette formalité sans formalisme, ce serait sans doute reprendre l'examen de toute la syllogistique aristotélicienne. Je me propose ici d'en étudier une incidence particulière avec quelque détail : le problème que posent le sens et l'usage de la *proposition particulière*, notamment en rapport avec le rôle qu'elle joue dans les procédures par lesquelles est démontrée la non-concluance des couples de prémisses autres que ceux des modes syllogistiques valides. J'espère en effet montrer que les textes relatifs à ces questions manifestent une modification significative de l'attitude d'Aristote, et qu'ils permettent de saisir sur le vif le travail du logicien, d'abord victime des équivoques du langage naturel, prenant ensuite de ces équivoques une conscience progressive, sous la poussée interne des problèmes eux-mêmes, et parvenant enfin à les maîtriser. Au terme de cette évolution, la proposition particulière abandonne celles de ses connotations usuelles qui perturbent son maniement logique, et n'est plus définie que par sa place dans un système d'oppositions, avec toutes les conséquences que cela comporte.

La proposition particulière traditionnelle, on le sait, est une source de problèmes épineux [8]. Ceux que soulève sa « portée existentielle » sont bien connus; toutes les consécutions de l'universel au particulier (subalternation, conversion « partielle » de l'universelle, mode *Darapti*) les mettent en vive lumière [9]. Un autre problème, non moins connu des logiciens, est celui de l'ambiguïté du système de ses relations avec les trois autres propositions comportant même sujet et même prédicat [10]. On peut présenter ce problème en faisant remarquer que, dans son usage naturel, la proposition particulière paraît être engagée dans trois relations qui sont incompatibles entre elles :

(*a*) Sa vérité est en relation de *contradiction* (ou alternative) avec celle de l'universelle de qualité opposée. En dépit du proverbe, chacun admet que

7. R. Blanché, *op. cit.*, p. 18.

8. « These troublesome propositions », disait J. Venn, *Symbolic Logic*, Londres 1881, p. 169, cité par R. Blanché, *Structures intellectuelles*, Paris, Vrin, 1966, p. 38.

9. Cf. l'exposé récent de W. et M. Kneale, *The Development of Logic*, Oxford, 1962, p. 56-61.

10. Cf. sur ce point R. Blanché, *Structures intellectuelles*, notamment le chapitre III, p. 35-46.

l'exception infirme la règle. Et l'usage commun emploie sans cesse les équivalences [11] :

$$AaB \leftrightarrow \sim AoB$$
$$AeB \leftrightarrow \sim AiB$$

(*b*) Sa vérité paraît impliquée par celle de l'universelle de même qualité, sa « *subalternante* » :

$$AaB \rightarrow AiB$$
$$AeB \rightarrow AoB$$

A vrai dire, l'usage commun adopte à l'égard de la subalternation une attitude hésitante. Supposons un interlocuteur X qui soit persuadé que tous les A sont B; si un interlocuteur Y émet devant lui l'opinion que quelques A sont B, X pourra, selon l'humeur et les circonstances, lui répondre, ou bien : « Vous avez raison, mon cher, et plus encore que vous ne pensez, puisqu'en réalité tous les A sont B », ou bien : « Vous avez tort, mon ami : il ne faut pas dire que *quelques* A sont B, il faut dire que *tous* les A sont B ».Mais je suppose que dans le second cas, Y serait porté à répliquer : « Nous sommes donc d'accord; puisque vous admettez que tous les A sont B, vous m'accorderez, à plus forte raison, que quelques A sont B. »

(*c*) Sa vérité paraît impliquer, et être impliquée par, celle de la particulière de qualité opposée; la proposition « Quelques A sont B » est ordinairement utilisée dans des situations où la proposition « Quelques A ne sont pas B » est également tenue pour vraie [12]. Je prend un exemple au hasard, dans un livre à portée de ma main : il est clair qu'en écrivant « Il y a quelques syllogismes où ce mot [*sc.* ἀνάγκη] est omis [13] », Lukasiewicz veut faire entendre qu'il existe aussi quelques *autres* syllogismes où ce mot *n'est pas* omis. L'usage commun admet donc aisément l'équivalence $AiB \leftrightarrow AoB$.

Or il est évident que l'on ne peut maintenir concurremment les trois relations (*a*), (*b*) et (*c*). Si elles étaient tenues toutes trois pour vraies, de AaB supposé vrai on pourrait déduire à la fois $\sim AoB$, par (*a*), et AoB, par (*b*) et (*c*), ce qui est contradictoire. Pour un usage logique non contradictoire de la particulière, il est donc nécessaire d'abandonner l'une au moins des trois relations (*a*), (*b*) et (*c*). On obtiendra ainsi trois « carrés des opposés », trois systèmes de relations théoriquement concevables [14].

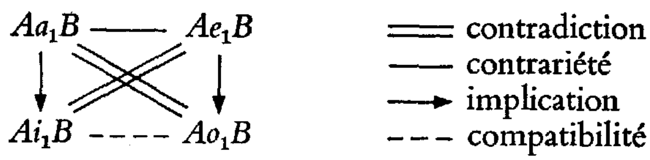
11. J'adopte ici la notation utilisée dans un ouvrage auquel cette étude se réfère constamment : Günther Patzig, *Die aristotelische Syllogistik*, 2e éd., Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht, 1963. La minuscule désigne l'une des quatres relations traditionnelles *a, e, i, o,*; les majuscules désignent les variables de termes, celle qui figure *à gauche* de la minuscule représentant le *prédicat*, et celle qui figure *à droite* représentant le *sujet*. *AaB* doit donc être lu « *A appartient à tout B* », ou encore « *Tout B est A* ». Sur les justifications de cette notation, qui reproduit l'usage aristotélicien le plus fréquent, cf. Patzig, *op. cit.*, p. 19 s.

12. Cf. Blanché, *Structures intellectuelles*, p. 36-37.

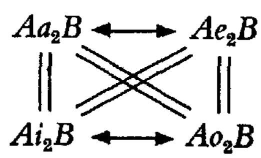
13. Lukasiewicz, *op. cit.*, p. 10.

14. Une solution, naturellement meilleure sur le plan théorique, consiste à modifier la structure quadratique traditionnelle pour faire place à *deux types* distincts de particulières, satisfaisant à eux deux les trois relations (*a*), (*b*) et (*c*). Tel est *l'hexagone logique* de M. Blanché, où figurent, outre les quatre postes traditionnels *a, e, i, o,* deux postes nouveaux : *y*, défini comme la *conjonction* de *i* et de *o*, et

I. Si l'on abandonne la relation (*c*), c'est-à-dire l'équivalence des deux particulières, on obtient le « carré » traditionnel. On conserve les relations (*a*), c'est-à-dire les contradictions *a-o* et *e-i*, et les relations (*b*), c'est-à-dire les subalternations *a-i* et *e-o*; mais les subcontraires *i-o* cessent de s'impliquer réciproquement pour devenir simplement compatibles (elles peuvent être toutes deux vraies, mais ne le doivent pas; elles doivent seulement ne pas être toutes deux fausses). Corrélativement, les deux universelles sont contraires entre elles : elles ne peuvent être vraies toutes deux, mais elles peuvent être toutes deux fausses. L'interprétation que doit ici recevoir la particulière est : « Quelque A *au moins* est B (n'étant pas exclu que tout A soit B) »; de même pour la négative. J'appellerai cette proposition *particulière minimale*, et je la noterai i_1 ou o_1. Le carré correspondant est bien connu :



II. Si maintenant l'on abandonne les relations (*b*), en maintenant les relations (*a*) et (*c*), on obtient un système tout différent. Les deux particulières s'impliquent l'une l'autre; si l'on veut que les couples *a-o* et *e-i* restent contradictoires, on est conduit paradoxalement à admettre que chacune des particulières, d'une part exclut l'universelle de même qualité, et est exclue par elle, d'autre part continue à exclure l'universelle de qualité opposée et à être exclue par elle : en effet, chacune des universelles ne peut contredire une particulière sans contredire l'autre, qui lui est équivalente. Il suit en outre que les deux universelles sont maintenant équivalentes, puisqu'elles contredisent deux propositions équivalentes. Le carré devient alors le suivant :



u, défini comme la contradictoire de *y*, c'est-à-dire comme la *disjonction* de *a* et de *e*. Cf. sur ce point, outre les *Structures intellectuelles* déjà citées, les deux exposés préliminaires de R. Blanché : *Sur l'opposition des concepts*, in *Theoria* 19 (1953) 89-130, et *Opposition et négation*, in *Revue philosophique* 147 (1957) 187-216; voir également G. Kalinowski, *Axiomatisation et formalisation de la théorie hexagonale de l'opposition de M. R. Blanché*, in *Les Études philosophiques* 22 (1967) 203-209. Si je préfère ici poser en termes de *choix* entre plusieurs « carrés » possibles un problème dont M. Blanché a su *intégrer* les éléments dans une structure plus complexe et plus compréhensive, c'est, comme on le verra plus clairement par la suite, parce que cette présentation a paru susceptible d'éclairer la nature des problèmes qui se sont posés à Aristote. Signalons qu'un système d'oppositions où figurent les mêmes postes que ceux de M. Blanché, mais désignés sous d'autres noms et schématisés d'une façon différente, a été présenté par Paul Jacoby, *A triangle of opposites for types of propositions in Aristotelian Logic*, in *The new Scholasticism* 24 (1950) 32-56, avec l'ambition (d'une cohérence peut-être discutable) d'être « fidèle à la théorie logique d'Aristote lui-même, en comblant quelques petites lacunes pour satisfaire aux exigences d'un schéma complet et cohérent » (p. 47).

Ces paradoxes s'éclairent facilement si l'on donne de la particulière l'interprétation suivante : « Quelque A *au moins et au plus* est B » (que j'appellerai ici *particulière maximale*, en la notant i_2 ou o_2). Dans les termes du carré traditionnel, i_2 et o_2 sont en effet tous deux équivalents à la *conjonction* $i_1 . o_1$; et si l'on veut maintenir les contradictions entre a et o, i et e, a_2 et e_2 se définiront *toutes deux* par la négation de cette conjonction, c'est-à-dire (en vertu des lois de dualité) par la *disjonction* $\sim i_1 \vee \sim o_1$, en d'autres termes, $a_1 \vee e_1$ [15].

III. On peut enfin imaginer, à titre récréatif, un système dans lequel on garderait les relations (b) et (c), en sacrifiant cette fois les relations de contradiction (a). Le maintien des implications $a \rightarrow i$ et $e \rightarrow o$, et de l'équivalence $i \leftrightarrow o$, imposerait alors d'admettre les implications $a \rightarrow o$ et $e \rightarrow i$; le système ne comporte plus de contradictoires; si i et o sont des particulières, a et e ne peuvent plus être des universelles. La relation entre les postes a et e reste indéterminée: deux propositions qui en impliquent une même troisième (ici la conjonction $i . o$) ne sont liées par aucune relation nécessaire. Si, pour que le nouveau « carré » d'opposition mérite encore ce nom, l'on choisit d'introduire entre a et e une relation de contradiction, on obtient cette conséquence supplémentaire, que les deux particulières sont toujours vraies : elles sont en effet impliquées par deux propositions dont il a été admis que l'une des deux est toujours vraie. Ce carré théorique aurait donc l'aspect suivant :

$$
\begin{tikzcd}
Aa_3B \arrow[r, equal] \arrow[d] \arrow[dr] & Ae_3B \arrow[d] \arrow[dl] \\
Ai_3B \arrow[r, leftrightarrow] & Ao_3B
\end{tikzcd}
$$

Il admet l'interprétation que voici : pour a et e, « un grand nombre de A sont (ne sont pas) B »; pour i et o, «, un petit nombre au moins de A sont (ne sont pas) B », étant entendu que toute relation universelle est exclue entre A et B.

Ce troisième système n'avait évidemment aucun titre à être retenu. Mais les deux autres en avaient l'un comme l'autre. Le premier a le mérite de la simplicité, mais il s'écarte de l'usage ordinaire en abandonnant l'équivalence des particulières; le second a les avantages et les inconvénients inverses [16].

15. Les *deux* particulières signifient : « A appartient à quelque B et n'appartient pas à quelque (autre) B »; les *deux* universelles signifient : « A appartient à tout B ou n'appartient à nul B », ou en d'autres termes : « A appartient universellement à B, soit affirmativement soit négativement ». On peut donc dire qu'il n'y a plus ici de *carré* d'opposition, mais un simple *segment* d'opposition, dont les termes sont $a_1 \vee e_1$ d'une part, $i_1 . o_1$ d'autre part. La combinaison de ce segment avec le carré traditionnel donnerait précisément l'hexagone de M. Blanché.

16. On pourrait montrer qu'Aristote s'est trouvé dans le domaine de la modalité, devant un problème de choix structuralement analogue. La proposition modale « il est possible que p » est en effet engagée, dans son usage naturel, en deux relations incompatibles; d'une part, elle est impliquée par sa « subalternante modale », « il est nécessaire que p », puisque, si un état de choses est dit nécessaire, on doit appa-

*

Aristote a opté sans l'ombre d'un doute, pour l'interprétation minimale de la particulière [17]; mais ce choix ne semble pas avoir été effectué d'emblée avec la pleine conscience de toutes ses exigences et implications; les connotations maximales de la particulière « naturelle » ont exercé sur son travail une action perturbatrice. A cette absence de *décision* initiale, il a payé un lourd tribut de labeur et de complications, comme nous allons le voir maintenant.

La définition que donne Aristote de la particulière est contenue dans les lignes *An. Pr.* I 1, 24 *a* 18-20: « J'appelle universelle ⟨la proposition énonçant que A⟩ appartient à tout ⟨B⟩ ou n'appartient à aucun ⟨B⟩, particulière ⟨celle qui énonce que A⟩ appartient à quelque ⟨B⟩ ou n'appartient pas à quelque ⟨B⟩ ou n'appartient pas à tout ⟨B⟩, indéfinie ⟨celle qui énonce que A⟩ appartient ou n'appartient pas ⟨à B⟩, sans ⟨aucune note indiquant⟩ l'universalité ou la particularité [18]. »

A la prendre en sa lettre, la définition de la particulière affirmative est évidemment minimale. La présence de deux expressions distinctes pour la particulière négative (μὴ τινί — μὴ παντί) soulève cependant un problème : la conjonction ἤ qui les sépare a-t-elle la même valeur que celle qui les précède, c'est-à-dire celui de la disjonction exclusive *aut*? Rien n'empêche théoriquement de penser qu'Aristote distingue ici trois particulières: l'affirma-

remment affirmer qu'il est *a fortiori* possible; d'autre part, elle équivaut à sa « subcontraire modale », « il est possible que non-*p* », puisque, si non-*p* n'était pas possible, on affirmerait de *p* qu'il est nécessaire, et non possible. Mais on ne peut admettre les deux relations à la fois, puisque la nécessité de *p* impliquerait médiatement la possibilité de non-*p*. Il faut donc choisir entre une interprétation *minimale* de la problématique (« il est *au moins* possible que *p*) et une interprétation *maximale* (« il est *au moins et au plus* possible que *p* »). Comme on sait, les hésitations d'Aristote ont pris dans le domaine de la modalité une forme plus nette et plus spectaculaire que dans le domaine de la qualité; il n'y a pas sacrifié l'interprétation maximale.

17. Je conteste donc directement les conclusions de Takeo Sugihara, *Particular and indefinite proposition in aristotelian logic*, in *Memoirs of Liberal Arts College, Fukui University* 3 (1954) 77-86. Cet article est venu à ma connaissance par une référence de I.M. Bochenski, *A History of Formal Logic*, Notre-Dame Press, 1961 (traduction par Ivo Thomas de *Formale Logik*, Freiburg-München, Alber 1956), p. 58 et 472; j'ai pu en consulter un tiré à part grâce à l'obligeance de M. Sugihara lui-même, et à l'aimable entremise de M. Takefumi Tokoro, que je remercie vivement tous deux. L'article est en japonais; il comporte un résumé anglais de deux pages, d'après lequel j'ai travaillé, et que je citerai ici littéralement, parce que Bochenski fait dire à l'auteur exactement le contraire de ce qu'il dit. Cf. Bochenski, *op. cit.*, p. 58 : « In the particular sentence, ' some 'means' at least one, not excluding all'. Whereas, as Sugihara has recently shown, an indefinite sentence should probably be interpreted in the sense : 'at least one A is B and at least one A is not B' ». La thèse de M. Sugihara est au contraire : « Aristotelian 'particu lar' is bilateral [*i. e.* « A applies to some of B and does not apply to the others of B »], and 'indefinite is unilateral [*i. e.* « A applies to some of B »] ». J'espère que l'exactitude du résumé anglais n'est pas à mettre en cause. Je signalerai et discuterai ci-dessous les trois arguments que donne M. Sugihara à l'appui de sa thèse.

18. Λέγω δὲ καθόλου μὲν τό παντὶ ἢ μηδενὶ ὑπάρχειν, ἐν μέρει δὲ τὸ τινὶ ἢ μὴ τινὶ ἢ μὴ παντὶ ὑπάρχειν, ἀδιόριστον δὲ τὸ ὑπάρχειν ἢ μὴ ὑπάρχειν ἄνευ τοῦ καθόλου ἢ κατὰ μέρος. Je traduis ici ἀδιόριστον par *indéfini*, conformément d'ailleurs à l'usage. Au point de vue logique,on sait qu'Aristote assimile l'indéfinie à la particulière : cf. par exemple I, 4, 26 *a* 28-30, 32-33, 39, etc.

tive, la négative minimale (μὴ παντί, en tant que simple négation de l'universelle, ne peut avoir que le sens minimal) et la négative maximale (μὴ τινί, à quoi il faudrait donner ce sens pour justifier sa disjonction d'avec μὴ παντί). Mais on peut écarter cette hypothèse, d'abord parce que si Aristote avait ici distingué o_1 et o_2, il aurait dû distinguer simultanément i_1 et i_2; ensuite parce que dans le cours de sa syllogistique, il ne reprend pas systématiquement la distinction μὴ παντί — μὴ τινί, et paraît traiter les deux expressions, dans les quelques passages où elles apparaissent, comme strictement équivalentes [19]. Il faut donc considérer que dans la phrase définitionnelle, le ἤ qui sépare μὴ τινί et μὴ παντί a, contrairement à celui qui les précède, le sens d'un *sive* identificateur; la signification de μὴ τινί, qui reste peu claire, doit donc être déterminée comme étant la même que celle de μὴ παντί, qui est univoque et minimale.

Par ailleurs, il est bien connu qu'Aristote, s'il n'a pas tracé explicitement le traditionnel carré des opposés, n'en admet pas moins ses deux relations essentielles, les contradictions *a-o* et *e-i*, et les subalternations *a-i* et *e-o* [20]. Il repousse implicitement toute équivalence entre les subcontraires *i* et *o* dans l'analyse qu'il donne de leur relation : après avoir dit d'abord que c'est une relation de contrariété (ἐναντίως) au même titre que la relation *a-e*, et par opposition aux contradictions *a-o* et *e-i*, il précise ensuite que la contrariété *i-o* n'est pas une véritable opposition, sinon dans la forme verbale [21]. Cela signifie qu'elles peuvent être vraies toutes deux, mais naturellement non qu'elles le doivent.

Il faut reconnaître toutefois que dans les exemples concrets qu'il donne de propositions particulières, Aristote utilise régulièrement des termes qui sont entre eux en relation d'appartenance particulière *maximale*, l'un des termes pouvant être inclus (*homme-animal*) ou non (*blanc-animal*) dans l'autre [22] : *homme* convient à quelque animal, non à tous, *blanc* convient à quelque animal, non à tous. Il n'est cependant pas possible d'en tirer argument, comme le fait M. Sugihara, pour affirmer que la particulière aristotélicienne est maximale: ce serait en effet confondre la situation habituelle dans laquelle une proposition est utilisée avec la signification de cette proposition [23], les exemples capables d'illustrer Ai_2B étant *a fortiori* capables d'illustrer Ai_1B, on ne peut affirmer sans pétition de principe que c'est

19. Cf. par exemple I, 4, 26 *a* 37, 26 *b* 4-5.

20. Cf. *An Pr.* II, 15, 63 *b* 23-30. Sur la subalternation, cf. *Top.* II, 1, 109 *a* 3-6; III, 6, 119 *a* 34 s, ; et les textes que nous retrouverons ci-dessous, *An Pr.* I, 4, 26 *b* 15-16 et 5, 27 *b* 21-22.

21. Cf. *An Pr.* II, 15, 63 *b* 27-28 : τὸ γὰρ τινὶ τῷ οὐ τινὶ κατὰ τὴν λέξιν ἀντίκειται μόνον.

22. Cf. la liste des 14 exemples de particulières concrètes figurant dans la syllogistique assertorique, in Sugihara, *art. cit.* (il faudrait cependant transférer l'exemple *neige-blanc* du second groupe au premier).

23. Cf. à ce sujet les remarques importantes de G. Patzig, *op. cit.*, p. 191 : « Umgangssprachlich bedeutet freilich ein Satz der Form « A kommt einigen B nicht zu » fast stets, dass einige B allerdings A sind. (Dies ist indessen noch eine oberflächliche Ansicht der Sache : *Bedeuten* kann der Satz *AoB* auch umgangssprachlich nicht, dass auch *AiC* [*sic*; lire *AiB*] gilt. Aber er wird meist nur in Situationen *benutzt*, in denen auch *AiC* [même remarque] gilt, und die Umgangssprache hat die Tendenz, die gewöhnliche Situation, in der ein Satz *verwendet* wird, seiner *Bedeutung* zuzurechnen. » (Souligné par l'auteur).

Ai_2B qu'ils prétendent illustrer. Tout au plus peut-on noter la répugnance d'Aristote à employer des exemples qui illustreraient Ai_1B sans illustrer en même temps Ai_2B, et ajouter que cette répugnance comporte un danger d'équivoque ou de malentendu.

*

Ces malentendus, liés aux adhérences du langage naturel, apparaissent en pleine lumière dans le domaine des *preuves de non-concluance* [24]. On sait qu'Aristote ne s'est pas contenté d'établir quelles sont les formes syllogistiques valides, mais qu'il démontre également que les couples de prémisses formellement distincts de ceux qui entrent dans les formes valides sont, de leur côté, incapables d'autoriser une conclusion. Ces procédures de *rejet* ont à juste titre attiré l'attention des logiciens modernes.

Le procédé qu'Aristote utilise le plus souvent, pour démontrer qu'un couple de propositions est non-concluant, a été désigné par Ross sous le nom de « preuve par instances contrastées [25] ». Sa structure logique a été excellemment analysée par G. Patzig [26]; il me suffira de résumer ici ce que dit cet auteur. Dire qu'un couple de prémisses appartient à l'ensemble des couples *concluants*, c'est dire qu'il impose nécessairement l'assignation, entre ses deux termes extrêmes, de *l'une ou l'autre* des quatre relations *a*, *e*, *i*, *o*, pour toute triade possible de concepts *ABC*. Dire qu'un couple de prémisses appartient à l'ensemble des couples non-concluants, c'est alors dire qu'il n'appartient pas à l'ensemble des couples concluants, et donc qu'il n'impose l'assignation, entre ses deux extrêmes, d'*aucune* de ces quatre relations. Or la nécessité d'une conclusion de type AxC est contredite par l'existence d'une triade de concepts satisfaisant à la fois le couple de prémisses considéré et une troisième proposition de forme $\sim AxC$. On voit donc que la non-concluance d'un couple de prémisses sera démontrée s'il est possible d'exhiber quatre triades de concepts satisfaisant, d'une part, le couple en question, et d'autre part, respectivement *chacune* des quatre relations $\sim a$, $\sim e$, $\sim i$, $\sim o$ (c'est-à-dire respectivement *o*, *i*, *e*, *a*).

Si l'on admet les lois de la subalternation, il est possible de simplifier cette preuve. En effet, la triade de concepts qui satisfait la relation AaC permet alors d'éliminer, non seulement la conclusion AoC, mais encore *a fortiori* la conclusion AeC; de même pour la triade satisfaisant AeC. Il suffit désormais, *et c'est ainsi que procède Aristote* [27], d'exhiber deux triades seulement pour éliminer les quatre conclusions éventuelles.

Le procédé d'Aristote a été très souvent qualifié d'extralogique, parce que

24. Cf. sur cette partie de la syllogistique Lukasiewicz, *op. cit.*, p. 67-72, p. 94-99, p. 100-132; Patzig, *op. cit.*, p. 180-197.

25. Cf. *Aristotle's Prior and Posterior Analytics*, a revised text with introduction and commentary by W. D. Ross, Oxford, Clarendon Press, 1949, p. 302.

26. G. Patzig, *op. cit.*, p. 187-190.

27. Cf. par exemple *An. Pr.* I, 4, 26 *a* 2-9, où la relevance des lois de la subalternation est expressément soulignée (καὶ γὰρ παντὶ καὶ μηδενὶ ἐνδέχεται τὸ πρῶτον τῷ ἐσχάτῳ ὑπάρχειν, ὥστε οὔτε τὸ κατὰ μέρος οὔτε τὸ καθόλου γίνεται ἀναγκαῖον).

les triades de concepts qu'il allègue sont composées de concepts concrets, comme *animal, homme, cheval* [28]. Patzig a défendu Aristote contre cette critique, en montrant que le caractère « naturel » de ces concepts n'est qu'un aspect accidentel de la preuve, et qu'Aristote aurait pu, sans rien changer à l'essence du procédé, *construire artificiellement* les concepts dont il avait besoin [29]. Prenons un exemple pour éclairer ce point. En *An. Pr.* I 4, 26 *a* 2-9, Aristote démontre la non-concluance du couple de première figure *AaB. BeC* en exhibant les deux triades *animal, homme, cheval* (qui satisfait les prémisses et *AaC*) et *animal, homme, pierre* (qui satisfait les prémisses et *AeC*) [30]. En développant les suggestions de Patzig, on peut indiquer une construction possible du *troisième terme* de chaque triade, *à partir des deux premiers* : satisfera *AaC* le concept « artificiel » *animal-non-homme* (dont le concept « naturel » *cheval*, choisi par Aristote, n'est qu'un sous-concept); satisfera *AeC* le concept *non-homme-non-animal* (dont le concept « naturel » *pierre* n'est à son tour qu'un sous-concept). En somme, une fois donnés deux concepts « naturels » A et B, satisfaisant la majeure *AaB*, on peut toujours trouver un concept C qui satisfasse la mineure *BeC* et *AaC*, ce sera (*A.* ~ *B*), et un autre concept C qui satisfasse *BeC* et *AeC*, ce sera (~ A. ~ B).

On peut même faire un pas de plus dans le sens indiqué par Patzig, et construire artificiellement, non pas seulement l'un des concepts à partir des deux autres, mais *deux des concepts à partir du seul troisième*; ainsi seulement écartera-t-on entièrement le reproche d'introduire en logique des propositions qui, comme « animal convient à tout homme », ne sont pas des thèses logiques. Dans l'exemple que nous avons pris, il y a un instant, la première triade serait A, (A. B), (A. ~ B) qui satisfait formellement les conditions requises, puisque la loi non-logique « animal appartient à tout homme » est remplacée par la loi logique « A appartient à tout (A. B) »; la seconde triade serait alors A, (A. B), (~ A. ~ B). Ce procédé de construction peut être généralisé, et l'on obtiendra dans tous les cas les triades requises par sommes ou produits logiques de variables conceptuelles. Si Aristote a préféré travailler avec des concepts « naturels », désignés par un mot unique du langage courant, on peut admettre avec Patzig que c'est pour rendre ses démonstrations intuitivement plus évidentes; mais il est permis de supposer que c'est par des procédés de construction du type décrit ci-dessus qu'il a déterminé les concepts « naturels » dont il a fait usage.

*

La preuve par instances contrastées n'est cependant pas la seule qu'Aristote ait utilisée pour ses démonstrations de non-concluance. On sait en

28. Cf. Lukasiewicz, *op. cit.*, p. 72 : This procedure is correct, but it introduces into logic terms and propositions not germane to it. « Man » and « animal » are not logical terms, and the proposition « All men are animals » is not a logical thesis. Logic cannot depend on concrete terms and statements ». Critique de même type chez Ross, *op. cit.*, p. 28-29, et chez beaucoup d'autres.

29. Cf. Patzig, *op. cit.*, p. 196.

30. Rappelons qu'en première figure, les termes des triades sont donnés dans l'ordre : majeur *A*, moyen *B*, mineur *C*.

effet qu'il emploie aussi, à l'occasion, un autre procédé, qui a retenu l'attention parce qu'il est le symétrique négatif de la démonstration de validité d'un mode concluant, par « réduction » à un autre déjà connu ou admis comme concluant: la non-concluance de certains couples de prémisses, de même, entraîne celle de certains autres. Cette amorce d'un système déductif du rejet a donné lieu à des recherches célèbres chez Lukasiewicz et son école[31]. L'aspect du problème qui nous retiendra ici sera moins l'analyse du procédé lui-même que celle des circonstances dans lesquelles Aristote l'emploie, et des modalités de cet emploi.

Aristote appelle ce procédé la *preuve par l'indéterminé*[32]. La possibilité de déduire, à partir d'une non-concluance déjà connue, une non-concluance nouvelle, repose en effet sur ce qu'il désigne sous le nom *d'indétermination de la particulière*, c'est-à-dire sur le fait qu'elle peut être vraie *aussi bien* si sa subalternante est fausse que si cette subalternante est vraie; en d'autres termes, *AoB* supposé vrai (A ne convient pas à quelque B) n'implique ni n'exclut la vérité de *AeB* (A peut, soit ne convenir à aucun B, et donc *a fortiori* ne pas convenir à quelque B, soit ne pas convenir à quelque B et convenir à quelque autre B). Il en est de même pour l'affirmative[33]. On voit aisément que cette indétermination de la particulière n'appartient qu'à la particulière *minimale*, et qu'elle est solidaire de la légitimité de la subalternation. Elle permet de déduire, de la non-concluance déjà connue d'un couple de prémisses comportant une universelle, la non-concluance du couple que l'on obtient en remplaçant cette universelle par la particulière subalternée; en effet, l'indétermination de la particulière implique que le second couple ne saurait être concluant sans que le premier ne le soit, ce qui est

31. Cf. Lukasiewicz, *op. cit.*, p. 94-99, et l'ensemble du chapitre V.

32. Ἐκ τοῦ ἀδιορίστου. Je traduis ici par *indéterminé*, pour bien marquer la différence entre cet emploi du mot et celui que j'ai traduit ci-dessus par *indéfini* (cf. note 18). La nécessité de cette différenciation sera justifiée dans la note suivante.

33. Cf. *An. Pr.* I, 4, 26 *b* 14-16 : ἐπεὶ ἀδιόριστον τὸ τινὶ τῷ Γ τὸ Β μὴ ὑπάρχειν, ἀληθεύετα δέ, καὶ εἰ μηδενὶ ὑπάρχει καὶ εἰ μὴ παντί, ὅτι τινὶ οὐχ ὑπάρχει. 5, 27 *b* 21-22; ἐπεὶ γὰρ ἀληθεύεται τὸ τινὶ μὴ ὑπάρχειν τὸ Μ τῷ Ξ καὶ εἰ μηδενὶ ὑπάρχει. 6, 28 *b* 28 : ἀδιορίστου γὰρ ὄντος τοῦ τινὶ μὴ ὑπάρχειν καὶ τὸ μηδενὶ ὑπάρχον ἀληθὲς εἰπεῖν τινὶ μὴ ὑπάρχειν. Cette indétermination n'est naturellement pas propre à la particulière négative : sur le cas de l'affirmative, cf. 5, 27 *b* 23-28. Il est tout à fait impossible de s'appuyer sur ces textes pour identifier la particulière minimale avec l'« indéfinie » aristotélicienne, comme le fait T. Sugihara : le mot ἀδιόριστος ne peut avoir la même signification quand il dénomme une proposition *non quantifiée* (la proposition *indéfinie*, cf. ci-dessus note 18) et quand il dénote une propriété appartenant à la proposition *quantifiée particulièrement* (l'*indétermination* de la proposition particulière, interprétée au sens minimal). La distinction de ces acceptions a été parfois bien aperçue (Cf. Waitz, *Organon*, Leipzig, 1844, t. I. p. 383; H. Maier, *Die Syllogistik des Aristoteles*, Tübingen, 1896, t. I, p. 162-163); mais elle a souvent aussi été masquée, parce que l'on a confondu ce que dit ici Aristote de *l'indétermination de la particulière* avec ce qu'il dit ailleurs (cf. ci-dessus, note 18) de *l'équivalence logique entre indéfinie et particulière*. Cette équivoque du mot ἀδιόριστος a même contribué à défigurer entièrement le texte d'un passage des *Topiques* (III, 6, 120 *a* 6 s.) dans la presque totalité de la tradition manuscrite, dans la totalité des éditions modernes et chez tous les commentateurs qui s'en sont occupés; une correction malencontreuse, et qui remonte très haut dans le temps, a transformé en *indéfinie* ce qui dans ce texte n'était que *particulière indéterminée*. Pour le détail de cette question, je ne puis ici que me permettre de renvoyer à mon édition des *Topiques*, t. I, Paris, Les Belles Lettres, 1967, p. 77 et 163-164.

déjà connu comme faux. La loi propositionnelle ici en jeu, comme l'a montré Patzig (*op. cit.*, p. 193, n. 2), est :

$$[\sim (p.\, q \rightarrow r) \cdot (q \rightarrow s)] \rightarrow \sim (p.\, s \rightarrow r).$$

Aristote n'a pas systématisé ce procédé, qui aurait pu théoriquement s'appliquer à tous les couples non-concluants comportant une particulière. Il ne l'emploie que lorsque son procédé habituel, la preuve par instances contrastées, rencontre certains obstacles, qui précisément sont eux aussi relatifs à la question de l'interprétation de la particulière. Les occurrences de la preuve par l'indéterminé sont au nombre de sept: (1) *An. Pr.* I, 4, 26 *b* 14-20; (2) 26 *b* 20-21; (3) 5, 27 *b* 20-23; (4) 27 *b* 28; (5) 28 *b* 28-31; (6) 29 *a* 3-6; (7) 15, 35 *b* 11. Ils concernent respectivement la non-concluance des couples *a-o* et *e-o* en première figure, *e-o* et *a-i* en deuxième figure, *a-o* et *e-o* en troisième figure, et enfin *a-o* en première figure avec majeure contingente et mineure assertorique. Ces passages ont souvent été étudiés; mais ils n'ont jamais, à ma connaissance, fait l'objet d'un examen qui les prenne tous systématiquement en considération [34].

Les cas (1) et (2) d'une part, (3), (4), (5), (6) d'autre part ne présentant pas de différences sous le rapport qui nous intéresse, il nous suffira d'ailleurs de trois analyses pour tirer le bénéfice de cet examen.

*

La première occurrence de la preuve par l'indéterminé apparaît dans les démonstrations de non-concluance des couples *a-o* et *e-o* en première figure (*An Pr.* I, 4, 26 *a* 39 s.). Elle se présente ici comme une preuve *secondaire*, *juxtaposée* à une preuve par instances contrastées; celle-ci n'est cependant pas du type habituel; les conditions particulières du cas à l'étude sont responsables *à la fois* de l'adoption par Aristote d'une variante insolite (et d'ailleurs logiquement fautive) de la preuve par instances contrastées et de l'addition, également insolite, d'une preuve supplémentaire par l'indéterminé.

Lorsque les prémisses sont de forme *AaB . BoC* ou *AeB . BoC*, commence Aristote, il n'y a pas de syllogisme [35]. Dans le premier cas, ajoute-t-il, le majeur A pourra être lié au mineur C aussi bien par la relation *a* que par

34. Par exemple, Lukasiewicz ne traite que du cas (3); Patzig analyse très précisément le cas (1), mais signale plus rapidement le cas (3) et ignore le cas (7); Sugihara n'énumère que les cas (1) à (6). Le cas (7) doit à sa place dans les chapitres de syllogistique modale la négligence dont il a été l'objet; mais les commentateurs de la syllogistique modale eux-mêmes n'y ont pas prêté grande attention. Albrecht Becker (*Die aristotelische Theorie der Möglichkeitsschlüsse*, Berlin, 1933) le déclare exactement semblable aux cas présentés dans la syllogistique assertorique (« In genau dem selben Sinn ... aufzufassen », p. 71, n. 2). Nous verrons qu'il n'en est rien. Le commentaire de Ross *ad locum* (*op. cit.*, p. 343-344) est lui aussi insensible aux particularités de ce passage.

35. Οὐδ' ὅταν τὸ μὲν πρὸς τῷ μείζονι ἄκρῳ καθόλου γένηται ἢ κατηγορικὸν ἢ στερητικόν, τὸ δὲ πρὸς τῷ ἐλάττονι στερητικὸν κατὰ μέρος, οὐκ ἔσται συλλογισμὸς ἀδιορίστου τε καὶ ἐν μέρει ληφθέντος. Les six derniers mots sont supprimés par Ross, comme « a pointless repetition of the previous line » (*op. cit.*, p. 304), ce qui n'est pas un bon argument : la ligne précédente dit que la mineure est particulière négative, celle-ci que le cas serait le même si elle était indéfinie. Cette correction discutable est tacitement approuvée par Patzig, *op. cit.*, p. 191, n. 1.

la relation *e* [36]; ce qui constitue l'amorce usuelle d'une preuve par instances contrastées [37].

Mais cette preuve ne s'effectue pas comme à l'accoutumée. Au lieu d'exhiber *deux* triades de concepts, satisfaisant l'une AaC, l'autre AeC, Aristote en exhibe une seule (*animal, homme, blanc*), dont on vérifiera aisément qu'elle satisfait bien $AaB . BoC$, mais qu'elle ne satisfait ni AaC, ni AeC, mais bien AiC et AoC en même temps. Il poursuit alors en *construisant* le concept « *blanc-non-homme* » ($C. \sim B$), qui est un sous-concept du mineur *blanc*, puis détermine à l'intérieur de ce concept « artificiel » deux concepts « naturels » dont l'un, *cygne*, est A, l'autre, *neige*, est $\sim A$ [38]. Le majeur *animal* étant universellement affirmé de *cygne* et universellement nié de *neige*, Aristote estime que l'absence de conclusion syllogistique est démontrée [39].

Cette procédure inhabituelle s'explique par la répugnance d'Aristote à utiliser, dans ses exemples concrets, des particulières autres que maximales. Dans le cas qui nous occupe, on peut trouver une triade de concepts satisfaisant à la fois la mineure BoC en un sens maximal et la relation AaC [40]; mais on ne peut en trouver qui satisfasse à la fois Bo_2C et AeC, parce que Bo_2C implique BiC et que le couple $AaB.BiC$ donne par *Darii* la conclusion AiC, laquelle contredit la relation cherchée AeC. La seule solution serait d'adopter une triade qui satisferait la mineure en un sens *minimal* seulement, c'est-à-dire sans impliquer BiC; en d'autres termes, cette mineure satisferait BeC, et donc aussi Bo_1C, mais seulement *a fortiori* [41].

Aristote a cru éviter cette nécessité, et pouvoir mener à bien sa preuve par instances contrastées, en recourant à un artifice dont Patzig a bien montré le caractère illégitime [42]. Pour le dire en deux mots, il a cherché à concilier les inconciliables, en jouant à la fois sur deux tableaux, celui de l'interprétation maximale de la particulière et celui des exigences de la preuve par instances contrastées. Sa triade initiale (*animal, homme, blanc*) satisfait Bo_2C; mais elle ne permet aucune relation universelle entre les extrêmes. Les deux triades qui s'y substituent (*animal, homme, cygne; animal, homme, neige*)

36. Ὧι γὰρ ἄν τινι μὴ ὑπάρχῃ τὸ μέσον, τούτῳ καὶ παντὶ καὶ οὐδενὶ ἀκολουθήσει τὸ πρῶτον. Sur le sens de ἀκολουθήσει, cf. la pertinente remarque de Patzig, *op. cit.*, p. 190, n. 2 et p. 30, n. 2.

37. Cf. *26 a 5-6*.

38. Εἶτα καὶ ὧν μὴ κατηγορεῖται λευκῶν ὁ ἄνθρωπος, εἰλήφθω κύκνος καὶ χιών. Il est clair qu'à la place de ces concepts «naturels», Aristote aurait pu, sur sa lancée, continuer à construire les concepts « artificiels » ($C. \sim B. A$) et ($C. \sim B. \sim A.$), dont *cygne* et *neige* ne sont que des sous-concepts.

39. Οὐκοῦν τὸ ζῷον τοῦ μὲν παντὸς κατηγορεῖται, τοῦ δὲ οὐδενός, ὥστε οὐκ ἔσται συλλογισμός.

40. En termes abstraits : A, ($A. B. C$), ($A. B$). En termes concrets, par exemple : *animal, homme, mammifère*. Rien n'empêche naturellement d'utiliser aussi une triade qui donnerait une mineure trop forte : en termes abstraits, A, ($A. B$), ($A. \sim B$) ; en termes concrets, par exemple, *animal, homme, cygne*.

41. En termes abstraits : A, ($A. B$), ($\sim A. \sim B$). En termes concrets, par exemple : *animal, homme, neige*.

42. Patzig, *op. cit.*, p. 191-192.

satisfont bien AaC et AeC; en revanche, elles ne satisfont plus Bo_2C, mais seulement Bo_1C. Autrement dit, le mineur est *blanc* lorsqu'il faut satisfaire Bo_2C, *cygne* (ou *neige*) lorsqu'il faut faire aboutir la preuve; la substitution étant simplement autorisée par le fait que *cygne* et *neige* sont inclus dans *blanc* (sont *quelque blanc*). Aristote a cru à tort que cette substitution pouvait se faire sans modification de la quantité de la mineure : en fait, comme le dit Patzig, la substitution transforme la mineure de particulière en universelle [43]. On perd donc d'une main ce qu'on gagne de l'autre; seul un *quaternio terminorum* permet de dissimuler la situation, et de croire qu'on a tout gagné.

Après quelques lignes qui transposent ce procédé au cas du couple $AeB.BoC$ [44], Aristote passe à une *nouvelle preuve*, introduite par le mot ἔτι : c'est la preuve par l'indéterminé. Le raisonnement est le suivant : BoC est vrai aussi quand BeC est vrai (*il s'agit donc de* Bo_1C); si le couple $AaB.BoC$ était concluant, le couple $AaB.BeC$ devrait donc l'être aussi ; or on a démontré plus haut [45] qu'il ne l'était pas; donc $AaB.BoC$ ne l'est pas non plus. Ce raisonnement est également appliqué, dans les lignes suivantes, au couple $AeB.BoC$.

La structure logique de la preuve par l'indéterminé ayant été parfaitement analysée par Patzig [46], je me contenterai de noter la situation paradoxale où se trouve ici Aristote [47]. *Par attachement aux connotations maximales de la particulière*, il a remanié, de façon d'ailleurs erronée, sa preuve par instances contrastées; puis il a présenté comme une preuve *alternative* une démonstration fondée sur l'indétermination de la particulière, c'est-à-dire *sur l'abandon de ses connotations maximales*. Cette attitude sans cohérence était vouée à se transformer; nous allons voir maintenant qu'elle l'a fait.

43. « Einige weisse Dinge » ist ein *anderer* Begriff als « Weisses »; und der zweite Satz würde durch die Einsetzung die Form « Mensch kommt einigen weissen Dingen *allgemein nicht* zu » erhalten (Patzig, *op. cit.*, p. 192). Souligné par l'auteur.

44. 26 *b* 10-14.

45. Par instances contrastées, cf. 26 *a* 2-9.

46. *Op. cit.*, p. 193-194.

47. Sur ce point, Patzig commet, me semble-t-il ,une erreur en écrivant à propos du passage qui nous occupe (p. 190) : « Wegen dieser « Unbestimmtheit » [l'indétermination de la particulière] ist es nun in einigen Fällen nicht möglich, zwei Begriffstripel der verlangten Art zu finden, die die Prämissen, z. B. *ao* der ersten Figur erfüllen, ohne auch *ae* zu erfüllen. » En réalité, la *raison* pour laquelle il est impossible de trouver des prémisses qui satisfassent *a-o* sans satisfaire aussi *a-e* n'est pas l'indétermination de la particulière, mais la *contradiction* inhérente à la conjonction $AaB.\ BoC. \sim BeC.\ AeC$; et l'indétermination de la particulière n'est pas la raison de cette situation, mais au contraire la *condition sous laquelle* une triade satisfaisant *a-e* sera considérée comme satisfaisant aussi *a-o*. Autrement dit, si Aristote s'en était tenu à la doctrine de l'indétermination de la particulière, sans se laisser troubler par l'usage courant, il n'aurait pas éprouvé de difficultés pour mener à bien, dans le cas qui nous occupe, sa preuve par instances contrastées; nous le verrons plus en détail ci-dessous, et du reste Patzig le dit excellemment lui-même, p. 191 (« Diese Schwierigkeit würde durch den Hinweis sofort beseitigt, den Aristoteles später ja auch aufnimmt, dass BoC nicht bedeuten *muss*, dass *auch* BiC gilt; dass BoC vielmehr auch wahr ist, wenn BeC wahr ist. Dann könnte man z. B. Lebewesen, Mensch, Schnee als Begriffe A, B, C, einsetzen, die sowohl AaB und BoC wie AeC erfüllen. Diesen Weg geht Aristoteles aber hier noch nicht »).

*

Dans le cas (3) de la liste que nous avons donnée ci-dessus (5, 27 *b* 12 sq.), Aristote se propose de démontrer la non-concluance du couple de deuxième figure *MeN.Mo X*. Il commence par dire que ce couple est compatible avec les deux relations *NaX* et *NeX* entre les extrêmes, ce qui annonce une démonstration par instances contrastées [48]. Il donne ensuite une première triade (*noir, neige, animal*) [49], qui satisfait les prémisses (*MoX* au sens maximal) et la relation *NeX* entre les extrêmes [50]. Mais il ajoute, et cela est très digne de remarque, *qu'on ne peut trouver de triade satisfaisant NaX si la particulière MoX a le sens maximal* [51]. Il en donne aussitôt la démonstration : la relation cherchée *NaX*, couplée avec la première prémisse *MeN*, livre par *Celarent* (avec renversement de l'ordre des prémisses) la conclusion *MeX*; or celle-ci contredit *MiX*, et donc Mo_2X [52].

Ce développement marque une conscience beaucoup plus nette des données du problème. Rien n'empêchait en effet Aristote de procéder comme il l'avait fait dans le premier cas que nous ayons examiné [53]; il n'en a rien fait. Il est curieux de constater, cependant, qu'après avoir signalé clairement la *condition* sous laquelle échoue nécessairement la preuve par instances contrastées, il n'a pas songé à faire aboutir cette preuve en levant cette condition, comme il aurait pu également le faire [54]. Au lieu de cela, il prend son parti de l'échec de la preuve par instances contrastées, et se rabat sur la preuve par l'indéterminé, présentée comme un *recours rendu nécessaire par cet échec* : « Dans ces conditions, donc, il n'est pas possible de prendre des termes ⟨adéquats⟩, mais il faut faire une démonstration par l'indéterminé [55] ». Cette démonstration ne fait pas de difficulté : la non-concluance de *MeN.MeX* ayant été démontrée par instances contrastées en 27 *a* 20-23, celle de *MeN.MoX* s'en déduit.

Malgré le progrès accompli, la situation dans laquelle se trouve mainte-

48. Ἐνδέχεται δὴ καὶ παντὶ καὶ μηδενὶ τῷ Ξ τὸ Ν ὑπάρχειν (15-16).

49. En seconde figure, les termes sont donnés dans l'ordre : moyen *M*, majeur *N*, mineur *X*.

50. En termes abstraits : A, (∼ A.∼ B. C), [(A. B) ∪ (∼ A. B)]. La particulière est ici maximale : *noir* convient aussi à quelque *animal*.

51. Τοῦ δὲ παντὶ ὑπάρχειν οὐκ ἔστι λαβεῖν, εἰ τὸ Μ τῷ Ξ τινὶ μὲν ὑπάρχει τινὶ δὲ μή (16-18).

52. Démonstration plus directe chez Alexandre d'Aphrodise, *in An. Pr.* 87, 9-28 : Mo_2X implique *MiX*, qui, couplé avec la première prémisse *MeN*, donne *NoX* par *Festino*; cette conclusion contredit *NaX*, relation qu'on voulait obtenir.

53. Il aurait pris une première triade satisfaisant *MeN* et Mo_2X, par exemple *bois, animal, blanc*, en termes abstraits *A*, (∼ *A. B*), [(*A. C*) ∪ (∼ *A. C*)]. Il aurait ensuite pris, dans les choses blanches qui ne sont pas de bois (∼ *A. C*), un concept de formule (∼ *A. B. C*), par exemple *cygne*, puis un concept de formule (∼ *A.B .*∼ *C*), par exemple *neige*; et il aurait tenu les relations *NaX* et *NeX* pour satisfaites, l'une par *cygne*, l'autre par *neige*, au prix de la substitution illégitime décrite plus haut.

54. Il suffisait de prendre une triade satisfaisant *MeN. MeX*, et donc *a fortiori* *MeN.* Mo_1X; Aristote en avait une à une portée de la main, puisqu'il avait démontré la non-concluance de *MeN. MeX*, en 27 *a* 20-22, par instances contrastées. La triade satisfaisant *NaX* était *ligne, animal, homme*; en termes abstraits, (∼ *A.*∼ *B*), *A*, (*A. B*).

55. Οὕτω μὲν οὖν οὐκ ἐγχωρεῖ λαβεῖν ὅρους, ἐκ δὲ τοῦ ἀδιορίστου δεικτέον (20-21). Οὕτω ne peut avoir d'autre sens que « si l'on prend une particulière de type Mo_2X ».

nant Aristote n'est pas moins incohérente que dans le cas précédent. En effet, il présente la preuve par l'indéterminé comme un *recours* contre l'échec de la preuve par instances contrastées [56]. Or c'est l'interprétation maximale de la particulière qui rendait cet échec nécessaire, et Aristote l'a bien vu; mais il est évident que cette interprétation rendrait également impossible la preuve par l'indéterminé, puisque l'universelle *n'implique pas* la particulière maximale. Autrement dit, *la preuve par l'indéterminé n'aboutit que si on lève la condition qui avait fait échouer la preuve par instances contrastées, et la preuve par instances contrastées aurait réussi si l'on avait admis les conditions sous lesquelles peut aboutir la preuve par l'indéterminé.* Les deux preuves sont, en fait, condamnées à réussir ou à échouer ensemble; et c'est une erreur de voir en l'une un remède à l'échec de l'autre.

Avant de passer à l'étude du cas (7), qui nous montrera que l'attitude d'Aristote s'est encore modifiée une fois, il peut être de quelque profit d'examiner quelques-uns des commentaires qui ont été consacrés à notre problème; le moment est bien choisi pour le faire, puisque, comme je l'ai dit, ces commentaires laissent régulièrement ce cas (7) de côté.

H. Maier, commentant le texte que nous venons d'analyser, écrit : « Cette observation [l'indétermination de la particulière] aurait donné la possibilité de mener à son terme la démonstration initiale [par instances contrastées] [...]. Cette manière de conclure sa démonstration s'est bien sûr présentée originairement à l'esprit d'Aristote. Mais au lieu de poursuivre ainsi, il interrompt sa démonstration initiale. La représentation du caractère indéterminé de la particulière négative lui rappelle que cette propriété permet d'effectuer une démonstration indépendante. Aussi reprend-il sur nouveaux frais : ἐκ δὲ τοῦ ἀδιορίστου δεικτέον [57] ». Cette reconstruction psychologique des processus mentaux d'Aristote n'est pas très convaincante : Aristote aurait-il interrompu sa démonstration initiale s'il avait vu la possibilité de la mener jusqu'à son terme? Aurait-il présenté la seconde preuve comme un remède à l'échec de la première s'il avait vu qu'elle contenait le moyen d'éviter cet échec? Cela n'est guère vraisemblable.

Lukasiewicz commente notre texte avec rapidité, et son commentaire n'est pas différent de celui de Maier; après avoir noté que la preuve par instances contrastées pouvait aisément être menée à son terme, il ajoute :

56. Il en est de même dans tous les autres cas énumérés ci-dessus, sauf (7). Cf. les rejets des couples *a-i* de deuxième figure (27 *b* 27-28 : τοῦ δὲ παντὶ οὐκ ἔσται λαβεῖν διὰ τὴν αὐτὴν αἰτίαν ἥνπερ πρότερον, ἀλλ'ἐκ τοῦ ἀδιορίστου δεικτέον), *a-o* de troisième figure (27 *b* 24-28 : τοῦ δὲ μηδενὶ οὐκ ἔστι λαβεῖν ὅρους [...] ἀλλ'ὥσπερ ἐν τοῖς πρότερον ληπτέον· ἀδιορίστου γὰρ ὄντος τοῦ τινὶ μὴ ὑπάρχειν κτλ.), *e-o* de troisième figure (29 *a* 3-6 : τοῦ δ'ὑπάρχειν οὐκ ἔστι λαβεῖν [...] ἀλλ' ἐκ τοῦ ἀδιορίστου δεικτέον).

57. H. Maier, *Die Syllogistik des Aristoteles*, Tübingen, 1896-1900, t. II *a*, p. 85 (86), n. 1 : « Diese Beobachtung hätte nun die Möglichkeit gegeben, den ursprünglichen Beweis zu Ende zu führen. [...]. Offenbar schwebt dem Aristoteles ursprünglich dieser Beweisabschluss vor. Anstatt jedoch so fortzufahren, bricht er vielmehr den ursprünglichen Beweis ab. Die Erwägung, dass das part.-verneinende Urteil unbestimmten Charakter hat, erinnert ihn daran, dass sich aus dieser Eigenschaft ein selbständiger Beweis führen lässt. So setzt er völlig neu an, usw. »

« Aristote, cependant, ne finit pas sa preuve de cette manière, parce qu'il voit une autre possibilité [58]. » Un mode de rédaction aussi versatile, interrompu et infléchi par des idées de traverse, est d'autant moins vraisemblable de la part d'Aristote que le cas (1), laissé de côté par Lukasiewicz, permet d'en écarter l'hypothèse : dans ce cas (1), en effet, la vision d'une « autre possibilité » n'avait pas empêché Aristote de mener jusqu'à son terme, au prix d'un effort laborieux et d'ailleurs malheureux, la preuve déjà amorcée par instances contrastées.

T. Sugihara, de son côté, traite simultanément des six occurrences de la preuve par l'indéterminé, effaçant ainsi toute différence entre les deux situations que nous avons jusqu'à présent distinguées. Il écrit : « Concernant ces six modes, il est impossible de prouver par instances contrastées qu'il n'y a pas syllogisme si la prémisse est particulière, tandis que c'est possible si la prémisse est indéfinie [...]. Tous ces énoncés d'Aristote sur les modes ne peuvent être interprétés correctement que si sa « particulière » est bilatérale [= maximale] et son « indéfinie » unilatérale [= minimale] [59]. » Aristote ne dit nullement que la non-concluance de ces six modes est indémontrable par instances contrastées si la prémisse est particulière : dans le premier cas, il effectue cette démonstration (en se trompant, mais peu importe); dans le second cas, il dit qu'elle est impossible *si la particulière est maximale* (*ou bilatérale*). Il ne dit pas davantage que la non-concluance est démontrable lorsque la prémisse est *indéfinie*; il montre qu'elle l'est *si la particulière est minimale* (*ou unilatérale*). Ces équivoques montrent à quel point il est nécessaire de bien distinguer les deux sens aristotéliciens d'ἀδιόριστος, dont l'un désigne une propriété qui peut ou non appartenir à la particulière, tandis que l'autre désigne une proposition autre que la particulière.

G. Patzig, enfin, après avoir analysé avec une clarté inégalée le cas (1), se contente un peu rapidement de lui assimiler les cas suivants. Il écrit notamment : « Aristote utilise la preuve ἐκ τοῦ ἀδιορίστου là, et là seulement, où [...] se rencontre cette difficulté, que pour l'une des deux triades de concepts on ne peut trouver de termes qui ne satisfassent pas *aussi* la forme *universelle* de la mineure. Que ce soit bien en fait cette difficulté qui, dans de tels cas, le fasse recourir à la loi qui a été décrite [loi de dérivation d'une non-concluance à une autre], cela ressort du texte de tous ces passages. Il suffit de citer ici la preuve de non-concluance de *e-o* en deuxième figure [suit la traduction des lignes 27 *b* 16-21] [60]. » Ce commentaire marque exactement

58. Lukasiewicz, *op. cit.*, p. 71 : « Aristotle, however, does not finish his proof in this way, because he sees another possibility. »

59. T. Sugihara, *art. cit.* : « Concerning the following 6 moods it is impossible to prove by contrasted instances that there is no syllogism if the premiss is particular, while it is possible if the premiss is indefinite. [...] All these statements of Aristotle about the moods can't be interpreted rightly, unless his « particular » is bilateral, and « indefinite » is unilateral. »

60. G. Patzig, *op. cit.*, p. 194 : « Das Verfahren ἐκ τοῦ ἀδιορίστου [...] wendet er dort und nur dort an, wo [...] die eben erörtete Schwierigkeit besteht, dass man für eins der beiden Begriffstripel keine Termini finden kann, die nicht *auch* die *allgemeine* Form der zweiten Prämisse erfüllen. Dass nun tatsächlich diese Schwierigkeit Aristoteles in solchen Fällen auf das beschriebene Gesetz zurückgreifen

ce qu'il y a de commun dans les divers cas examinés, il ne rend pas justice à leurs différences.

*

Le cas (7), qui nous reste maintenant à examiner, figure dans la syllogistique modale (15, 35 *b* 11); il y est, sauf erreur de ma part, seul de son espèce. La circonstance est déjà remarquable. La liste des six occurrences de la preuve par l'indéterminé dans la syllogistique assertorique pouvait se justifier facilement, sur le plan théorique : il y en a autant que de modes concluants à mineure particulière, soit six (*Darii* et *Ferio* en première figure, *Festino* et *Baroco* en deuxième, *Datisi* et *Ferison* en troisième). En effet, si l'on remplace les mineures de ces modes par leurs subcontraires, on obtiendra des couples de prémisses qui rencontreront nécessairement l'obstacle que nous connaissons, lorsqu'on tentera de démontrer leur non-concluance par instances contrastées : la seconde prémisse, si elle est prise au sens maximal, pourra être remplacée de nouveau par sa subcontraire, et le couple deviendra bel et bien concluant. La liste des six cas est donc déterminée par substitution de *i* à *o* et de *o* à *i* dans la liste ci-dessus : *a-o* et *e-o* en première figure, *e-o* et *a-i* en deuxième, *a-o* et *e-o* en troisième. Quant aux modes dans lesquels c'est la majeure qui est particulière, ils sont concluants quelle que soit la qualité de cette majeure (*Disamis* et *Bocardo*); ils tombent donc en dehors de cette énumération.

L'isolement du cas (7), par contraste avec l'organisation en système des six premiers cas, soulève un problème sur lequel il faudra revenir. Le texte lui-même est très bref. Aristote s'y propose en l'espèce de rejeter la combinaison $AaB.BoC$ avec majeure contingente et mineure assertorique (que nous noterons $MAaB.BoC$ [61]). Il se contente de déclarer que dans ce cas, « il n'y aura pas syllogisme. Termes d'attribution : *blanc, animal, neige*; de non-attribution, *blanc, animal, poix*. C'est en effet au moyen de l'indéterminé qu'il faut prendre la démonstration [62]. »

Ce texte appelle de nombreux commentaires. Remarquons d'abord que rien n'empêchait théoriquement Aristote de procéder comme il l'avait fait dans le cas que nous avons étudié en dernier lieu. Annonçant une démonstration par instances contrastées [63], il aurait montré qu'on peut

lässt, geht aus dem Text an allen diesen Stellen hervor. Es genügt, den Beweis für die Unschlüssigkeit von *eo* in der zweiten Figur hierherzusetzen. »

61. Toujours en conformité avec l'usage adopté par G. Patzig, je note la proposition contingente en préfixant la lettre *M*, l'apodictique en préfixant la lettre *N*; l'absence de lettre préfixée dénote l'assertorique. *M* dénote, conformément à la définition « forte » de la contingence : *ni nécessaire ni impossible.* Nous n'aurons pas ici à envisager les complications nées de la concurrence de la définition « faible » (*non impossible*).

62. Οὐκ ἔσται συλλογισμός. Ὅροι τοῦ μὲν ὑπάρχειν λευκόν-ζῷον-χιών, τοῦ δὲ μὴ ὑπάρχειν λευκόν-ζῷον-πίττα· διὰ γὰρ τοῦ ἀδιορίστου ληπτέον τὴν ἀπόδειξιν (35 *b* 9-11).

63. Celle-ci se présente sous une forme modifiée en syllogistique modale, le nombre des relations à exhiber entre les extrêmes étant multiplié par le nombre des modalités qui peuvent affecter ces relations; théoriquement, il faudrait donc exhiber six triades de concepts pour éliminer toutes les relations possi-

trouver une triade de concepts satisfaisant les prémisses et la relation *NAaC* [64], mais qu'on ne peut en trouver qui satisfasse la relation *NAeC* si la prémisse particulière est prise dans le sens maximal; ce qu'il aurait aussitôt démontré [65]. Après quoi, il aurait eu recours à la preuve par l'indéterminé, et aurait dérivé la non-concluance de *MAaB*. *BoC* de celle de *MAaB*. *BeC*, déjà démontrée par instances contrastées en 35 *a* 20-24.

Au lieu de quoi, Aristote se contente de faire aboutir la preuve par instances contrastées, en exhibant deux triades de concepts, dont l'une satisfait *NAaC* (*blanc*, *animal*, *neige*) [66], et l'autre *NAeC* (*blanc*, *animal*, *poix*) [67], et dans lesquelles la mineure particulière n'est vraie qu'*a fortiori* (puisque *animal* ne convient en fait à nulle *neige*, et à nulle *poix*) [68]; ce sont donc *les mêmes triades* que celles qui permettaient de rejeter *MAaB*. *BeC* (cf. 35 *a* 20-24). Et il ajoute : c'est *en effet* au moyen de l'indéterminé qu'il faut prendre la démonstration. Cette expression, significativement différente de celles qui ont été relevées plus haut [69], montre que l'indétermination de la particulière ne sert plus ici à fonder une « preuve par l'indéterminé » qui serait le substitut d'une « preuve par instances contrastées » défaillante, mais qu'elle assure désormais simplement le succès de la preuve par instances contrastées. *Il n'y a plus maintenant deux preuves distinctes*, mais une seule, la preuve par instances contrastées, qui utilise à l'occasion le ressort sur lequel reposait la seconde. Cette clarification de la situation correspond à une liquidation maintenant intégrale des connotations maximales de la particulière; le γάρ de la ligne 35 *b* 11 permet à lui seul d'affirmer que la particulière n'a désormais plus d'autre sens que celui que lui donne son statut de simple négation de l'universelle. La particulière « logique » a eu quelque peine à tuer la particulière « naturelle »; mais elle a fini par y arriver.

---

bles. Aristote se contente cependant d'exhiber deux triades, dans lesquelles les relations entre les extrêmes sont universelles et *apodictiques*. Cette simplification est justifiée en 14, 33 *b* 3-17 : en exhibant la relation *NAaC*, on exclut les conclusions *négatives* apodictique et assertorique, et la conclusion *affirmative* problématique (parce que le nécessaire *n'est pas* contingent); en exhibant la relation *NAeC*, on exclut les conclusions *affirmatives* apodictique et assertorique, et la conclusion *négative* problématique.

64. En termes concrets, par exemple : *blanc*, *animal*, *blanc-comme-neige*. En termes abstraits : A, [(A. B) ∪ (∼ A. B)], [(A. B. C) ∪ (A. ∼ B. C)].

65. Par exemple en montrant que *BiC*, impliqué par la mineure maximale Bo_2C, se combine avec la majeure *MAaB* pour donner (par *Darii* avec majeure contingente et mineure assertorique, cf. 35 *a* 30-35) la conclusion *MAiC*, qui contredit la relation cherchée *NAeC*.

66. En termes abstraits : *A*, [(*A*. *B*.∼ *C*) ∪ (∼ *A*. *B*.∼ *C*)], (*A*.∼ *B*. *C*).

67. En termes abstraits : (*A*.∼ *C*), [(*A*. *B*.∼ *C*) ∪ (∼ *A*. *B*.∼ *C*)], (∼ *A*.∼ *B*. *C*).

68. Cette manière de procéder n'est indispensable, on l'a vu, que dans l'un des deux cas, celui de la relation *NAeC*. Si Aristote l'a adoptée dans les deux cas, c'est d'abord parce qu'il s'est contenté de reproduire les triades dont il s'était servi pour démontrer la non-concluance de *MAaB*. *BeC* (cf. 35 *a* 20-24); c'est aussi, sans doute, parce qu'il tenait à présenter deux triades contenant deux termes communs. Cette contrainte favorise l'évidence intuitive de la preuve par instances contrastées; mais elle n'appartient pas à l'essence de la preuve (cf. Patzig, *op. cit.*, p. 196). Ce point est, avec l'usage de concepts « naturels », le seul sur lequel Aristote paraisse n'avoir pas pris l'exacte mesure de ce qu'il y avait d'essentiel et d'accessoire dans son procédé.

69. Cf. note 56.

*

Il manque cependant une pièce encore à notre démonstration. On a remarqué plus haut que la référence de 35 *b* 11 à l'indétermination de la particulière était isolée dans la syllogistique modale. Cet isolement est surprenant : il est *a priori* invraisemblable que la situation qui provoque cette référence ne se produise qu'une fois sur cent-vingt-huit (nombre des combinaisons possibles de prémisses modalisées). On est donc logiquement conduit à supposer qu'Aristote a dû parfois faire usage de l'indétermination de la particulière *sans le dire expressément*; cette manière de faire, si elle se vérifiait, permettrait de dire cette fois que la particulière maximale est non seulement morte, mais bel et bien enterrée.

La vérification de cette hypothèse exigerait une étude systématique des preuves de non-concluance en syllogistique modale, étude qui comporterait des développements et des complications considérables. Je me bornerai ici à quelques indications.

(1) La preuve par instances contrastées n'est pas la seule preuve de non-concluance utilisée par Aristote en logique modale. Lorsqu'il étudie un couple de prémisses modalisées correspondant à un couple assertorique concluant, il lui est possible de montrer que les démonstrations de concluance du couple assertorique sont rendues inefficaces par la modalisation des prémisses [70]. Or ne pas pouvoir démontrer la concluance, c'est démontrer la non-concluance.

(2) La preuve par instances contrastées garde une place importante, mais revêt des formes nouvelles, et parfois surprenantes. Dans les combinaisons de prémisses plus fortes que les combinaisons assertoriques (une ou deux prémisses apodictiques), prenons à nouveau le cas des couples qui correspondent à un couple assertorique concluant. Le seul problème est dans ces cas de savoir si le couple modalisé est capable d'une conclusion apodictique, plus forte que celle du couple assertorique, ou s'il n'est capable que de la conclusion assertorique. Dans cette situation, il n'est plus nécessaire d'exhiber deux triades de concepts, l'une pour écarter les éventuelles conclusions affirmatives, l'autre pour écarter les éventuelles conclusions négatives; si le couple assertorique a une conclusion négative, le couple modalisé ne saurait avoir une conclusion affirmative, et inversement; une triade de concepts suffira donc pour exclure la seule conclusion qui fasse sérieusement acte de candidature [71].

70. Cf. par exemple la démonstration de non-concluance de *MAeB. MAaC* (17, 37 *a* 32 s.), couple de seconde figure dont le correspondant assertorique est le mode concluant *Cesare. Cesare* pouvait se réduire à *Celarent* par conversion de la majeure; mais l'universelle négative ne se convertit plus lorsqu'elle est contingente. *Cesare* pouvait aussi se démontrer par l'absurde; cette démonstration n'est plus possible avec des prémisses contingentes, pour lesquelles les lois d'incompatibilité des assertoriques ne sont plus valables (*AeC* est incompatible avec *AaC*, mais *MAeC* ne l'est pas avec *MAaC*).

71. Cf. par exemple le rejet de *NAaB. AeC* $\rightarrow$ *NBeC* (10, 30 *b* 18 s.), couple de seconde figure dont le correspondant assertorique est le mode concluant *Camestres*. Aristote démontre successivement ce rejet (1) en réduisant ce mode, par conversion de la mineure, à un mode de première figure dont il a déjà démontré que la conclusion n'est pas apodictique; (2) par l'absurde; (3) par « production de termes concrets » (ὅρους ἐκθέμενον). Cette dernière démonstration consiste en l'exhibition d'une triade *unique*,

(3) La « conversion complémentaire » des contingentes [72] introduit naturellement de grandes nouveautés dans le système. Tout d'abord, un certain nombre de couples qui n'étaient pas concluants en logique assertorique le deviennent en logique modale, grâce à la conversion complémentaire d'une prémisse négative en prémisse affirmative. En outre, cette conversion complémentaire va permettre dans certains cas à la preuve par instances contrastées de faire l'économie d'une triade de concepts, une triade unique permettant maintenant d'écarter les deux conclusions éventuelles. Supposons par exemple que l'on étudie un couple de deux prémisses contingentes. La conclusion, si conclusion il y a, ne peut être que contingente; les quatre conclusions possibles sont *Ma*, *Me*, *Mi*, *Mo*. En logique assertorique, on l'a vu, il était possible de réduire de quatre à deux le nombre des conclusions à écarter, en vertu de la *subalternation* (l'exclusion de *o* entraînant *a fortiori* celle de *e*, et l'exclusion de *i* entraînant *a fortiori* celle de *a*). À présent, il est toujours possible de réduire de quatre à deux le nombre des conclusions à écarter, mais c'est cette fois en vertu de la *conversion complémentaire* [73] : l'exclusion de *Mo* est en même temps celle de *Ma*, l'exclusion de *Mi* est en même temps celle de *Me*. Reprenons l'exemple de la démonstration de non-concluance de $MAeB . MAaC$ (17, 37 *a* 32 s.), déjà évoqué plus haut à un autre point de vue [74]. Après les deux démonstrations dont nous avons parlé, Aristote en présente une troisième par termes concrets [75]. En principe, il faudrait exhiber *deux triades de concepts*, dont l'une permettrait d'exclure les conclusions éventuelles $MBaC$ et MBo_1C en satisfaisant leur négation commune $NBaC \vee NBo_1C$, et dont l'autre permettrait d'exclure les conclusions éventuelles $MBeC$ et MBi_1C en satisfaisant leur négation commune $NBeC \vee NBi_1C$. Mais le caractère disjonctif de ces négations va permettre à Aristote d'utiliser *la même triade de concepts* pour exclure les deux couples de conclusions éventuelles. En effet, une triade dont les extrêmes satisfe-

---

sur laquelle il nous faudra d'ailleurs revenir (*animal, homme, blanc*), qui permet d'exclure la conclusion $NBeC$. Il est inutile de chercher une triade capable d'exclure la conclusion $NBaC$, celle-ci étant *a fortiori* exclue par la conclusion BeC de *Camestres*, et les prémisses ici envisagées étant plus fortes que celles de *Camestres*.

72. Ross a baptisé de ce nom (*op. cit.*, p. 298) l'ensemble des lois admises par Aristote sur la base du principe selon lequel, si un état de choses est contingent, sa négation l'est aussi. Ces lois sont les suivantes :

$$\begin{array}{l} MAaB \rightarrow MAeB \\ MAaB \rightarrow MAoB \\ MAeB \rightarrow MAaB \\ MAeB \rightarrow MAiB \\ MAiB \rightarrow MAoB \\ MAoB \rightarrow MAiB \end{array}$$

Il faut noter que des deux expressions $MAaB$ et $MAiB$, aucune désormais n'implique l'autre. De même pour $MAeB$ et $MAoB$.

73. En effet, $MBaC \leftrightarrow MBo_1C \leftrightarrow \sim NBaC . \sim NBo_1C$; $MBeC \leftrightarrow MBi_1C \leftrightarrow \sim NBeC . \sim NBi_1C$. Les négations sont naturellement équivalentes aussi : $\sim MBaC \leftrightarrow \sim MBo_1C \leftrightarrow \sim NBaC \vee NBo_1C$; $\sim MBeC \leftrightarrow \sim MBi_1C \leftrightarrow NBeC \vee NBi_1C$.

74. Cf. note 70.

75. Διὰ τῶν ὅρων (37 *b* 1-2).

raient la relation *NBeC* (dans l'exemple d'Aristote, *A blanc*, *B homme*, *C cheval*) satisfera le second terme de la première disjonction (par subalternation $NBeC \rightarrow NBo_1C$), et donc cette disjonction elle-même; elle satisfera également le premier terme de la seconde disjonction, et donc cette disjonction elle aussi. Les quatre solutions contingentes possibles sont éliminées d'un seul coup par la production d'une triade dont les extrêmes sont liés par une relation apodictique.

(4) En analysant le seul passage de la logique modale où Aristote fasse explicitement recours à l'indétermination de la particulière (35 *b* 11), nous avons vu qu'Aristote y prouvait qu'il avait fini par comprendre que *les mêmes triades de concepts* pouvaient lui servir pour démontrer la non-concluance d'un couple de prémisses comportant une universelle et pour démontrer (« grâce à l'indéterminé ») celle du couple obtenu par substitution à cette universelle de sa subalterne : les triades *blanc-animal-neige* et *blanc-animal-poix* avaient servi contre *MAaB.BeC* en 35 *a* 20-24, elles resservent contre *MAaB.BoC* en 35 *b* 8-11. Cette découverte libère Aristote du souci de trouver des triades de concepts distinctes pour chacune des démonstrations de non-concluance qu'il veut effectuer. Une fois découverte une triade appropriée à la démonstration de non-concluance d'une « combinaison-mère », cette triade sera considérée comme démonstrative de la non-concluance de toutes les « combinaisons-filles »; j'entends par combinaisons-filles celles qu'on obtient en remplaçant les prémisses de la combinaison-mère par celles qu'elles impliquent par subalternation, ou qui leur sont équivalentes par conversion complémentaire. Le jeu particulier et le jeu combiné de ces deux facteurs, subalternation et conversion complémentaire, fera nécessairement que le nombre des combinaisons-filles sera considérable; ainsi s'expliquent ces véritables « fournées » de démonstrations de non-concluance qu'Aristote effectue d'un seul coup, en disant que *les mêmes termes concrets* sont déterminants dans tous les cas rassemblés [76].

(5) Si deux termes concrets liés *en fait* par une relation universelle *a* ou *e* peuvent être considérés (et Aristote le croit maintenant sans arrière-pensée) comme satisfaisant *a fortiori* la relation particulière i_1 ou o_1, cette situation comporte une contrepartie : il faut admettre aussi que deux termes concrets liés *en fait* par une relation particulière maximale $(i_1 . o_1)$ soient considérés

76. Par exemple, après avoir démontré grâce à une triade unique (*blanc*, *homme*, *cheval*, cf. ci-dessus paragraphe 3) la non-concluance de *Me-Ma* en seconde figure, Aristote ajoute : « La démonstration sera la même si la négative est transposée [*Ma-Me*], si les prémisses sont toutes deux affirmatives [*Ma-Ma*] ou négatives [*Me-Me*] (la démonstration se fera en effet *par les mêmes termes concrets*, διὰ τῶν αὐτῶν ὅρων); de même lorsque l'une est universelle et l'autre particulière [*Ma-Mi*, *Ma-Mo*, *Me-Mi*, *Me-Mo*, *Mi-Ma*, *Mi-Me*, *Mo-Ma*, *Mo-Me*] ou toutes deux particulières [*Mi-Mi*, *Mi-Mo*, *Mo-Mi*, *Mo-Mo*] ou indéfinies, ou de toutes les autres façons qu'on pourra prendre les prémisses; la démonstration se fera toujours, en effet, par les mêmes termes concrets, ἀεὶ γὰρ ἔσται διὰ τῶν αὐτῶν ὅρων ἡ ἀπόδειξις (37 *b* 10-16). Aristote suppose que, puisqu'en fait quelques hommes sont blancs et quelques hommes ne sont pas blancs, aucune des quatre relations *a*, *e*, *i*, *o* n'est nécessaire entre les termes *blanc* et *homme*, et que ces termes satisfont donc les quatre relations *Ma*, *Me*, *Mi*, *Mo*, qui figurent toutes quatre dans les majeures des couples énumérés ici.

comme *pouvant satisfaire* les relations universelles *a* ou *e*. Par exemple, s'il est vrai qu'en fait quelque animal est blanc et quelque animal n'est pas blanc, les propositions « Tout animal est blanc » et « Nul animal n'est blanc » sont toutes deux fausses, *mais non impossibles*. Dès lors, le premier pas franchi par Aristote pouvait se prolonger d'un second : le premier avait consisté à admettre qu'une relation particulière est satisfaite par deux termes concrets qui la satisfont *a fortiori*; le second consistera à admettre qu'une relation universelle est satisfaite par deux termes concrets qui *pourraient* (bien qu'ils ne le fassent pas en fait) la satisfaire. Cette procédure subtile est utilisée dans le rejet de $NAaB.AeC \rightarrow NBeC$ (10, 30 *b* 18 sq.), que nous avons évoqué plus haut [77]. La triade qui permet de rejeter la conclusion *NBeC* est en effet *animal, homme, blanc*. Cette triade est donnée comme satisfaisant *AeC*, c'est-à-dire la mineure *assertorique* « *animal* n'appartient à aucun *blanc* »; et en effet, explique Aristote, « *il peut se faire* qu'*animal* n'appartienne à aucun *blanc* » [78]. Passant hardiment de l'assertion d'une possibilité à la possibilité d'une assertion, Aristote use de ce stratagème pour montrer que la conclusion *BeC* (*homme* n'appartient à aucun *blanc*), qui de son côté est elle aussi fausse, mais non impossible, suit nécessairement des prémisses supposées vraies, mais n'est pas *en elle-même* apodictique. Dans ce nouvel avatar, la preuve par termes concrets prend un sens radicalement nouveau : le lecteur d'Aristote n'est plus invité à constater, dans le monde réel, les relations logiques qu'entretiennent mutuellement les animaux, les hommes, les couleurs, mais à se transporter dans un monde imaginaire, mais possible, où par exemple aucun être blanc ne serait vivant, et à se demander ce qui en résulterait [79]. Il est inutile de souligner combien la preuve par termes concrets, dans cet élargissement, perd de son « évidence » intuitive; inutile également de faire remarquer combien il est facile à Aristote, retrouvant le monde réel où quelques êtres blancs seulement sont inanimés, de déclarer que la non-concluance du couple subalterné $NAaB.AoC$ se démontre « à l'aide des mêmes termes qui ont servi pour les syllogismes universels [80] ». Le contraire aurait été étonnant.

*

Au cours de l'évolution qui vient d'être retracée, Aristote a donc progressivement et parallèlement liquidé les connotations maximales de la particulière, aboli la distinction entre une « preuve par instances contrastées » et une « preuve par l'indéterminé », assoupli les critères en vertu desquels on

77. Cf. note 71.

78. Ἐνδέχεται γὰρ τὸ ζῷον μηδενὶ λευκῷ ὑπάρχειν (30 *b* 35).

79. Signalons une conséquence de cet élargissement. S'il n'est plus nécessaire, pour éliminer une conclusion syllogistique, de signaler l'existence dans le monde *réel* de trois termes *A*, *B*, *C* qui l'infirment, et s'il suffit de signaler l'existence de tels termes dans un monde *possible*, il en résulte *a contrario* que les variables des conclusions syllogistiques valides sont substituables par des êtres possibles comme par des êtres réels.

80. Οἱ γὰρ αὐτοὶ ὅροι ἔσονται πρὸς τὴν ἀπόδειξιν οἵπερ ἐπὶ τῶν καθόλου συλλογισμῶν (31 *a* 14-15).

peut reconnaître que deux termes concrets « satisfont » une relation donnée. Il est heureux qu'il n'ait pas eu la volonté ou le loisir de récrire l'ensemble des *Premiers Analytiques* pour le mettre en harmonie avec le dernier état de sa pensée logique : l'édifice qu'il nous a laissé a gardé son échafaudage. Parlant de ses prédécesseurs, il a souvent dit qu'ils avaient été parfois contraints « par la chose même » à modifier leurs positions primitives [81]; il a eu lui-même, comme on voit, le bon goût de ne pas se dérober à cette contrainte[82].

81. *De Part. Anim.* I 1, 642 *a* 27-28; cf. *Metaph.* A3, 984 *a* 18; *Phys.* I 5, 188 *b* 27.

82. Au moment où je corrige les épreuves de cet article, je prends connaissance du livre récent de Lynn E. Rose, *Aristotle's Syllogistic*, Springfield, Thomas, 1968, qui traite avec précision les problèmes que j'ai examinés, en particulier dans ses chapitres VI (*Invalidation by counterexample*) et IX (*Subalternation*). Je disais ci-dessus (n. 34) que les occurrences de la preuve par l'indéterminé n'avaient jamais été exhaustivement et systématiquement examinées. Ce n'est plus vrai : M. Rose en donne la même liste que moi, p. 40 de son livre. Il étudie en détail les cas 3, 1 et 7 dans son chapitre VI (p. 40-49), et le cas 5 dans son chapitre IX (p. 86-88, où l'on notera cependant qu'il se borne à recopier, avec les quelques transpositions nécessaires, ce qu'il avait dit p. 41-43 sur le cas 3). Je suis heureux de constater entre ses analyses et les miennes, une convergence qui va parfois jusqu'à de surprenantes rencontres. Cependant, en première approximation et sous réserve d'une étude plus poussée, je marquerai un désaccord sur deux points. Tout d'abord, je crois que M. Rose ne tient pas un assez grand compte du travail de G. Patzig (qu'il connaît et cite à l'occasion) : il néglige aussi bien la critique très précise que cet auteur a faite du procédé utilisé en 26 *b* 3-14 (cf. ci-dessus, n° 38-44) que la défense qu'il a présentée du caractère logique, au moins en droit, de la technique de rejet par exemples contrastés (cf. ci-dessus, n. 28-30). En second lieu, M. Rose étudie les diverses procédures adoptées par Aristote dans un ordre arbitraire; elles apparaissent comme des tentatives un peu désordonnées pour sortir d'une situation difficile; l'originalité du cas 7, entrevue p. 49, n'est pas vraiment dégagée. J'ai essayé de montrer au contraire que ces procédures s'ordonnaient selon une ligne précise, manifestaient une prise de conscience progressive des données du problème et des conditions de sa solution, et permettaient d'assister, en quelque sorte, au *travail de la formalisation*.

Boole

L'analyse mathématique de la logique

Introduction

Ceux* qui sont au courant de l'état présent de la théorie de l'algèbre symbolique savent que la validité des démarches de l'analyse ne dépend pas de l'interprétation des symboles utilisés mais seulement des lois de leur combinaison. Tout système d'interprétation qui n'affecte pas la vérité des relations posées comme principes est également acceptable. C'est ainsi que le même procédé peut, selon tel schéma interprétatif, représenter la solution d'un problème portant sur les propriétés des nombres, selon un autre, celle d'un problème géométrique, selon un troisième, celle d'un problème de dynamique ou d'optique. Ce principe est évidemment d'une importance fondamentale, et l'on peut affirmer sans risque que les développements récents de l'analyse pure ont été beaucoup favorisés par l'influence qu'il a exercée en orientant le courant de la recherche.

Mais la pleine reconnaissance des conséquences de cette importante théorie a été, dans une certaine mesure, retardée par des circonstances accidentelles. En chaque forme connue de l'analyse, il s'est trouvé que les éléments à déterminer ont été conçus comme mesurables par rapport à une unité fixe. L'idée prédominante était celle de grandeur ou, plus précisément, de proportion numérique. L'expression de la grandeur ou d'opérations sur la grandeur a été l'objet exprès pour lequel les symboles de l'analyse ont été inventés et pour lequel leurs lois ont été recherchées. Ainsi les abstractions de l'analyse moderne non moins que les schémas ostensifs de la géométrie antique, ont renforcé l'idée que les mathématiques sont, aussi bien en leur essence que de fait, la science de la grandeur.

La prise en considération de ce que nous avons déjà affirmé comme le véritable principe de l'algèbre symbolique devrait, d'une manière ou d'une autre, nous amener à penser que cette conclusion n'est en rien nécessaire. Si toutes les interprétations existantes s'avèrent envelopper l'idée de grandeur, ce n'est que sur la base d'une induction que nous pouvons affirmer qu'il n'y a pas d'autre interprétation possible. Aussi bien peut-on douter que notre expérience soit assez vaste pour la légitimer. L'histoire de l'analyse pure est, on peut le dire, trop récente pour nous permettre de délimiter le domaine de ses applications. Nous serait-il possible de nous fier, avec un haut degré de probabilité, à cette inférence que

* *The Mathematical Analysis of Logic* by George Boole, Cambridge, Mac Millan, 1847. Nous reprenons une partie de l'introduction (p. 3-11) et le 1er chapitre *in extenso*. Traduction de Y. Michaud.

nous pourions encore, et avec raison, maintenir que la définition, à laquelle le principe déjà établi peut nous conduire, est suffisante. Nous pourrions avec rigueur établir le caractère définitif d'un véritable calcul en disant qu'il est une méthode reposant sur l'emploi de symboles dont les lois de combinaison sont connues dans leur généralité et dont les résultats admettent une interprétation consistante. Que l'on donne des formes existantes de l'analyse une interprétation quantitative n'est que le résultat des circonstances dans lesquelles elles furent établies et ne doit pas être érigé en condition universelle de l'analyse. C'est sur le fondement de ce principe général que je me propose d'établir le calcul logique et que je lui réclame une place parmi les formes reconnues de l'analyse mathématique, sans égard au fait qu'en son objet comme en ses instruments il doive actuellement demeurer en dehors d'elle.

Ce qui rend la logique possible, c'est l'existence en nos esprits de notions générales, notre faculté de concevoir une classe et de désigner les individus qui en sont membres par un même nom. La théorie de la logique est ainsi intimement liée à celle du langage. Une entreprise qui réussirait à exprimer des propositions logiques par des symboles, dont les lois de combinaison seraient fondées sur les lois des opérations mentales qu'elles représentent, serait, du même coup, un pas vers un langage philosophique. Mais c'est là une vue que nous n'avons pas ici à pousser plus avant dans le détail. [*Note en bas de page omise.*] Supposons le concept d'une classe : nous sommes à même, à partir de n'importe quelle collection concevable d'objets, de séparer mentalement ceux qui lui appartiennent et de les envisager à part de tout le reste. Nous pouvons concevoir la répétition d'un tel choix ou d'un acte similaire. Le groupe des individus qui reste ainsi soumis à notre considération peut, à son tour, être limité si nous distinguons mentalement ceux d'entre eux qui appartiennent à la fois à une autre classe reconnue et à la première classe considérée. Cette opération peut être répétée avec d'autres éléments de distinction jusqu'à ce que nous parvenions à un individu possédant tous les caractères distinctifs pris en considération, individu qui appartient en même temps à toutes les classes que nous avons énumérées. C'est en fait une semblable méthode que nous employons dans le langage commun toutes les fois que nous accumulons les épithètes descriptives pour obtenir une définition précise.

Or les différentes opérations que nous avons supposées réalisées dans ce cas sont justiciables de lois particulières. On peut déterminer des relations entre elles, que ce soit en ce qui concerne la répétition d'une opération, la succession d'opérations différentes ou le fait que certaines ne soient jamais enfreintes. Il est, par exemple, vrai que le résultat de deux opérations successives n'est pas affecté par l'ordre d'effectuation. On verra aussi en lieu propre deux autres lois. A certains peut-être ces lois paraîtront si évidentes qu'on les doit ranger parmi les vérités nécessaires — et si peu importantes qu'elles ne méritent pas une mention particulière. De fait, elles trouvent peut-être leur première mention en cet *Essai*. On peut toutefois assurer, sans risque d'erreur, que si elles étaient autres qu'elles ne sont, le mécanisme entier du raisonnement, que dis-je, les lois et la constitution même de l'esprit humain en serait radicalement modifiées. Il pourrait certes y avoir une logique; ce ne serait plus celle que nous possédons.

Telles sont les lois élémentaires, sur l'existence et sur la possibilité d'expression symbolique exacte desquelles est fondée la méthode de l'*Essai* qui suit. Et nous présumons que l'on estimera très parfaitement atteint l'objet qu'il se propose. Toute proposition logique, catégorique ou hypothétique, peut être exprimée exactement et rigoureusement, on le montrera. Non seulement on en peut déduire les lois de la conversion et du syllogisme mais aussi la résolution des systèmes de propositions les plus complexes, l'expression de la valeur de n'importe quel élément séparé dans les termes des éléments restants, avec toutes les relations connexes qui sont impliquées. Chaque opération représentera une déduction, chaque conséquence mathématique une inférence logique. La généralité de cette méthode nous permettra même d'exprimer des opérations arbitraires de l'esprit et conduira ainsi à la démonstration en logique de théorèmes généraux analogues à beaucoup d'égards à ceux des mathématiques habituelles. Une grande part du plaisir que nous trouvons dans l'application de l'analyse à l'interprétation de la nature extérieure naît des idées qu'elle nous permet de concevoir sur l'universalité du règne de la loi. Les formules générales auxquelles nous sommes conduits semblent lui conférer une présence visible et la multiplicité des cas particuliers auxquels elles s'appliquent démontre l'étendue de son domaine. Même la symétrie de leur expression analytique peut, sans interprétation chimérique, être jugée indicative de son harmonie et de son unité. Pour le présent, je ne m'aventure pas à dire jusqu'à quel point les mêmes sources de plaisir sont dévoilées dans l'*Essai* qui suit. La mesure de ce domaine peut être laissée à l'estimation de ceux qui trouveront le sujet digne de leur étude. Mais je puis m'avancer jusqu'à dire que de telles occasions de satisfaction intellectuelle ne manquent pas ici. Les lois que nous avons à examiner sont celles d'une des plus importantes de nos facultés intellectuelles. Les mathématiques qu'il nous faut construire sont celles de l'esprit humain. La forme et le caractère de cette méthode, quant à eux, en dehors de toute préoccupation d'interprétation ne sont pas sans mériter l'attention. Il y a même, en ses théorèmes généraux, un remarquable exemple de cette sorte d'excellence qu'est l'absence d'exceptions. Bien plus, on peut l'observer là où, dans les cas correspondants des mathématiques habituelles, ce n'est en rien apparent. Ceux qui, en petit nombre, pensent qu'il y a dans l'analyse de quoi la rendre digne d'intérêt en elle-même, peuvent trouver intéressant de l'étudier sous une forme où toute équation peut être résolue et toute solution interprétée. On ne diminuera pas non plus l'intérêt de cette étude à réfléchir au fait que chaque particularité qui se présente dans le calcul représente un trait correspondant dans la même constitution de l'esprit lui-même.

Il serait prématuré de parler de la valeur que cette méthode peut avoir comme instrument de recherche dans la science. Je pense ici à la théorie du raisonnement et au principe d'une vraie classification des formes et des cas de la logique considérée comme une science. [*Note en bas de page omise.*] Le propos de ces recherches était primitivement restreint à l'expression de la logique traditionnelle et à la présentation qu'en a donnée Aristote; mais il apparut bientôt que l'on introduisait ainsi des restrictions purement arbitraires et non fondées dans la nature des choses. On les a notées au fur et à mesure et on en discutera en lieu propre. Quand il devint nécessaire de considérer le problème des propositions hypothétiques (sur lesquelles, comparativement, moins de travail a été réalisé) et plus encore quand fut nécessaire une interprétation des théorèmes généraux de calcul, il s'avéra impératif d'abandonner tout souci de précédence et d'autorité et d'interroger la méthode elle-même pour exprimer les justes limites de son application. Là encore toutefois on ne chercha pas, à toute force, à obtenir des résultats inédits. Mais parmi ceux qui, lors de leur découverte, parurent tels, il peut être bon de remarquer les suivants.

Conformément à la méthode de cet *Essai*, une proposition logique peut être exprimée par une équation dont la forme détermine les règles de conversion et de transformation auxquelles la proposition est soumise. Ainsi la loi de ce que les logiciens appellent conversion simple est déterminée par le fait que les équations correspondantes sont symétriques, ne sont pas affectées par un changement mutuel de place des symboles qui correspondent aux classes convertibles. On détermina ainsi les lois traditionnelles de la conversion, puis un autre système, qu'on estime plus élémentaire et plus général. Voir le chapitre : *De la conversion des propositions.*

Les prémisses d'un syllogisme étant exprimées par des équations, l'élimination d'un symbole commun conduit à une troisième équation qui exprime la conclusion, cette conclusion étant toujours la plus générale, qu'elle soit aristotélicienne ou non. Parmi les cas où aucune inférence n'est possible, on découvrit qu'il y avait deux formes distinctes de l'équation finale. Cette découverte précéda de beaucoup l'explication. On vit à la longue que tout dépendait de la présence ou de l'absence d'un véritable intermédiaire de comparaison entre les prémisses. Cette distinction que l'on estime nouvelle est mise en évidence dans le chapitre : *Des syllogismes.*

Le caractère non exclusif de la conclusion disjonctive d'un syllogisme hypothétique est très clairement mis en relief dans les exemples donnés de cette sorte d'argument.

L'ensemble des problèmes logiques traités dans le chapitre : *De la solution des équations de choix* apparaît comme neuf et l'on estime que la méthode de ce chapitre donne les moyens d'une analyse exhaustive de n'importe quel système de proposition, but dont les règles de conversion d'une seule proposition catégorique ne sont qu'une première approche.

De toute manière, quant à l'originalité globale ou partielle de ces vues, je n'ignore pas que j'ai une connaissance trop peu étendue de la littérature consacrée à la logique et particulièrement de l'ancienne pour me permettre de trancher avec assurance.

Il n'est peut-être pas déplacé, avant de conclure, de présenter quelques remarques sur la question générale de l'usage du langage symbolique en mathématiques. On a élevé, récemment, avec beaucoup de force, des objections à l'encontre de cette pratique, en prétendant qu'en se déchargeant de l'obligation de penser et en substituant à l'effort personnel un renvoi à des formules générales, on tend à affaiblir les facultés de raisonnement.

En fait, le problème de l'usage des symboles peut être considéré sous deux points de vue distincts. Par rapport au progrès de la découverte scientifique d'une part, à sa portée sur la discipline de l'esprit d'autre part.

En ce qui concerne le premier point de vue, on peut observer que tel usage est le résultat d'un travail élaboré, qu'il nous libère pour des tâches plus difficiles. C'est un résultat inévitable d'un état avancé de la science que nous ayons liberté, voire obligation de passer à des problèmes plus élevés que ceux dont nous nous préoccupons d'abord. La conséquence pratique est évidente. Si, en usant de la force des méthodes scientifiques, nous trouvons que les recherches où nous étions d'abord engagés ne procurent plus un champ assez vaste à l'effort intellectuel, le remède est de passer à de plus hautes recherches et par des voies nouvelles de porter l'effort sur des difficultés encore non maîtrisées. Tel est évidemment l'impératif présent du progrès scientifique. Nous devons être heureux d'avoir à choisir entre l'abandon de l'espoir de conquêtes ultérieures et l'emploi d'adjuvants comme le langage symbolique, appropriés au moment de la progression où nous sommes arrivés. Nous n'avons pas à craindre de nous confier à un tel chemin.

Nous ne sommes pas encore arrivés si près des frontières du savoir possible pour appréhender que l'espace vienne à manquer pour l'exercice des facultés inventives.

Pour discuter la seconde question, à peine moins importante, de l'influence de l'usage de symboles sur la discipline de l'esprit, il faudrait faire une importante distinction. Il est de la plus extrême importance de savoir si ces symboles sont utilisés en pleine connaissance de leur signification, avec une pleine compréhension de ce qui rend leur utilisation légitime et favorable à l'extension des formules de raisonnement ainsi obtenues jusqu'à leur plein développement syllogistique; ou bien si elles ne sont que des lettres sans signification, dont l'usage n'est admis que par autorité.

La réponse à donner à la question posée doit différer selon que l'une ou autre de ces suppositions est admise. Dans le premier cas on fournit ainsi à la raison une discipline intellectuelle d'un ordre élevé, un exercice non seulement de la raison mais de la faculté de généralisation. Dans l'autre il n'y a aucune discipline mentale d'aucune sorte. Ce serait, peut-être, la meilleure assurance contre les dangers d'une confiance irraisonnée dans les symboles et aussi bien contre un oubli de leurs justes prétentions, que chaque sujet de mathématiques appliquées dût être traité dans l'esprit des méthodes connues au moment où l'application fut faite et aussi dans la forme la plus achevée de ces méthodes. L'ordre d'acquisition par l'individu aurait ainsi quelque relation à l'ordre réel de la découverte scientifique et les méthodes les plus abstraites de l'analyse la plus élaborée seraient offertes aux seuls esprits qui seraient préparés à les recevoir.

La relation directe qu'entretient cet *Essai* à la fois avec la logique et les mathématiques peut en outre justifier la mention de la question, qui a été récemment ravivée, de la valeur relative de ces deux disciplines dans une bonne éducation. Une des objections principales élevée contre l'étude des mathématiques en général n'est qu'une autre forme de celle qui a été, plus particulièrement, envisagée à propos de l'usage des symboles. Aussi n'y a-t-il pas à en traiter plus que pour noter que, si elle a la moindre valeur, elle vaut tout autant contre l'étude de la logique. Les formes canoniques du syllogisme aristotélicien sont, en fait, de nature symbolique; seulement les symboles en sont moins parfaits en leur genre que ceux des mathématiques. Si l'on en use pour éprouver un argument, elles prennent tout autant la place de l'exercice de la raison que le renvoi à une formule de l'analyse. Que les hommes, aujourd'hui, utilisent ces canons aristotéliciens hormis comme illustration toute désignée des règles de la logique, on en peut douter. On ne peut toutefois mettre en doute que, à l'époque où l'autorité d'Aristote dominait en Europe les écoles, de telles applications étaient courantes. Aussi bien notre argumentation demande-t-elle seulement que l'on admette une telle possibilité. [*Fin de l'introduction omise.*]

1. Premiers principes

Nous utiliserons le symbole 1 ou unité pour représenter la classe universelle. Nous l'entendons comme enveloppant toute classe concevable d'objets, qu'elle ait une existence actuelle ou non, en posant comme principe que le même individu peut se retrouver en plus d'une classe, tout de même qu'il peut avoir en commun plus d'une qualité avec d'autres. Nous emploierons les lettres X, Y, Z, pour représenter les individus appartenant à la classe; X s'appliquant à chaque individu d'une classe en tant qu'il appartient à cette classe, Y à chaque individu d'une autre classe en tant qu'il lui appartient et ainsi de suite, selon le langage habituel des traités de logique.

Concevons ensuite une classe de symboles x, y, z, ayant le caractère suivant : le symbole x opérant sur un domaine donné comprenant des individus ou des classes sera supposé distinguer dans ce domaine tous les X qu'il contient. De la même manière, le symbole y opérant sur un domaine sera supposé distinguer en lui tous les individus de la classe Y qui y sont contenus, et ainsi de suite.

Quand aucun domaine n'est explicitement posé, nous supposerons que 1 (la classe universelle) est le domaine entendu, de telle sorte que nous aurons :

$$x = x\,(1),$$

chaque terme signifiant que l'on choisit dans la classe universelle tous les X qu'elle contient; le résultat de l'opération sera, dans le langage courant, la classe X, c'est-à-dire la classe dont chaque membre est un X.

De ces principes, il s'ensuit que le produit $x \cdot y$ représentera à son tour la sélection de la classe Y et la sélection dans cette classe Y de tous les individus de la classe X qui y sont contenus, le résultat étant la classe dont les membres sont à la fois des X et des Y. De la même manière, le produit xyz représentera une opération composée dont les éléments successifs sont la sélection de la classe Z, celle en elle des individus de la classe Y qui lui appartiennent, et la sélection, dans le résultat ainsi obtenu, de tous les individus de la classe X qu'il contient; le résultat final étant la classe commune à X, Y, Z.

D'après la nature de l'opération que les symboles x, y, z, sont conçus représenter, nous les appellerons symboles de choix. Une expression où ils sont impliqués sera appelée une fonction de choix, et une équation dont les membres seront des fonctions de choix sera appelée une équation de choix.

Il ne sera pas nécessaire d'entrer ici dans l'analyse de l'opération mentale que nous avons représentée par le symbole de choix. D'après l'acception commune du terme, ce n'est pas un acte d'abstraction, parce que nous ne perdons jamais de vue le concret, mais on peut probablement la rattacher à un exercice des facultés de comparaison et d'attention. Notre souci présent est plutôt celui des lois de combinaison et de succession, qui gouvernent ses résultats, et parmi elles, il suffira de noter les suivantes :

1° le résultat d'un acte de choix est indépendant du groupement et de la classification qu'on fait du domaine.

Ainsi, il est indifférent que d'un groupe d'objets considéré comme un tout nous sélectionnions la classe X ou que nous divisions ce groupe en deux parties, sélectionnions en elles séparément les X, puis groupions les résultats en un résultat d'ensemble.

Nous pouvons exprimer cette loi mathématiquement par l'équation :

$$x(u + v) = xu + xv,$$

$u + v$ représentant le domaine non divisé et u et v les parties composantes.

2° l'ordre d'effectuation de deux actes de choix successifs est indifférent. Que nous sélectionnions dans la classe des animaux les moutons, puis parmi les moutons ceux qui ont des cornes, ou de la classe des animaux ceux qui ont des cornes, puis, parmi eux, ceux qui sont des moutons, le résultat ne change pas : dans les deux cas, nous arrivons à la classe des *moutons à cornes*.

L'expression symbolique de cette loi est :

$$xy = yx,$$

3° le résultat d'un acte de choix donné effectué deux fois (ou n'importe quel autre nombre de fois à la suite) est le résultat du même acte effectué une seule fois.

Si d'un groupe d'objets nous sélectionnons les X, nous obtenons une classe dont tous les membres sont des X. Si nous répétons l'opération sur cette classe, il ne s'ensuivra aucun autre changement : en sélectionnant les X, nous prenons la totalité d'entre eux.

Ainsi nous avons :

$$xx = x$$

ou :

$$x^2 = x$$

et en supposant la même opération effectuée n fois, nous avons

$$x^n = x$$

qui est l'expression mathématique de la loi énoncée ci-dessus [1].

Les lois que nous avons établies sous forme symbolique :

$$x(u + v) = xu + xv \quad (1)$$

$$xy = yx \quad (2)$$

$$x^n = x \quad (3)$$

sont suffisantes comme base du calcul. D'après la première d'entre elles, il apparaît que les symboles de choix sont *distributifs*; d'après la seconde, qu'ils sont *commutatifs*; propriétés qu'ils possèdent en commun avec les symboles de la *quantité* et en vertu desquelles toutes les opérations de l'algèbre ordinaire sont applicables au présent système. Un seul axiome est enveloppé dans cette application, et il est suffisant, à savoir, que les opérations équivalentes effectuées sur des domaines équivalents produisent des résultats équivalents [2].

La troisième loi (3), nous l'appellerons loi de tabulation. Elle est propre à ces symboles de choix, et s'avérera de grande importance en ce qu'elle nous permet de réduire nos résultats à des formes susceptibles d'interprétation.

De ce que les opérations de l'algèbre peuvent être appliquées au présent système, on ne doit pas inférer que l'interprétation d'une équation de choix restera non affectée par de telles opérations. L'expression d'une vérité ne peut être détruite par une opération légitime, elle en peut être restreinte. L'équation $y = z$ implique que les classes Y et Z sont équivalentes terme à terme. Multiplions-la par un facteur x et nous avons

$$xy = xz$$

qui exprime que les individus communs aux classes X et Y sont aussi communs à X et Z, et vice-versa. L'inférence est parfaitement légitime, mais ce qu'elle affirme est moins général que ce qui était affirmé dans la proposition d'origine.

1. La fonction du symbole de choix x est de sélectionner les individus compris dans la classe X. Si nous supposons la classe X embrasser l'univers, alors, quelle que soit la classe Y, nous avons

$$xy = y.$$

La fonction que x remplit est alors équivalente au symbole $+$, dans une au moins de ses interprétations, et la loi de tabulation (3) donne

$$+^n = +$$

qui est la propriété connue de ce symbole.

2. Ceux qui écrivent sur la logique affirment en général que tout raisonnement repose finalement sur le dictum aristotélicien *de omni et nullo* : « Tout ce qui est affirmé universellement d'une classe quelconque de choses peut être dit aussi bien de n'importe quel élément de cette classe. » Mais on s'accorde à reconnaître que ce dictum n'est pas immédiatement applicable dans tous les cas, et que le plus souvent

une certaine opération préalable de réduction est nécessaire. Quels sont les éléments enveloppés dans cette démarche de réduction ? De toute évidence, ils font tout autant partie de l'acte général de raisonner que le dictum lui-même.

Une autre façon de considérer le problème réduit tout raisonnement à l'application de l'un ou l'autre des canons suivants :

1) si deux termes s'accordent avec un même troisième, ils s'accordent entre eux;

2) si un terme s'accorde et un autre non, avec un même troisième, ils ne s'accordent pas entre eux.

Mais l'application de ces canons dépend d'actes mentaux qui sont équivalents à ceux enveloppés dans la démarche de réduction nommée ci-dessus. Il nous faut choisir les individus dans deux classes, convertir les propositions, etc., avant de pouvoir nous en servir. Une explication de la démarche du raisonnement est insuffisante si elle ne présente pas aussi bien les lois de l'opération accomplie par l'esprit durant ce processus que les vérités de base qu'il reconnaît et applique.

L'auteur estime que les lois en questions sont adéquatement représentées par les équations fondamentales du calcul exposé ici. On en trouvera la preuve en ce qu'il peut et exprimer les propositions et exhiber dans les résultats de ses opérations tous ceux auxquels on peut arriver par le raisonnement ordinaire.

Cantor

Fondements d'une théorie générale des ensembles

§ 1

Telle[a] que je l'ai menée jusqu'à maintenant, la présentation de mes recherches touchant la théorie des ensembles [1] en est venue à un point où je ne peux la poursuivre qu'en étendant au-delà de ses limites antérieures le concept de nombre entier réel. En vérité cette extension s'oriente dans une direction où, à ma connaissance, nul ne l'avait jusqu'à présent cherchée.

Si grande est la dépendance où je me vois placé à l'égard de cet élargissement du concept de nombre qu'il me serait difficilement possible sans cela, de continuer à progresser librement dans la théorie des systèmes; puisse-t-on dans cette circonstance trouver de quoi me justifier ou, s'il en est besoin, m'excuser d'introduire dans mes réflexions des notions apparemment insolites. C'est qu'il s'agit d'étendre ou de continuer par-delà l'infini la série des nombres entiers réels; pour hardie que cette tentative puisse paraître, je puis néanmoins exprimer non seulement l'espoir, mais bien la ferme conviction qu'avec le temps, cette extension ne pourra plus être regardée que comme parfaitement simple, appropriée et naturelle. Ce disant, je ne me dissimule en aucune façon que par cette entreprise, j'entre en opposition, dans une certaine mesure, avec des conceptions largement répandues concernant l'infini mathématique et avec des points de vue que l'on a fréquemment adoptés sur l'essence de la grandeur numérique.

En ce qui concerne l'infini mathématique, dans la mesure où celui-ci a trouvé jusqu'à présent un emploi justifié dans la science et a contribué utilement à ses progrès, il me paraît avoir au premier chef la signification d'une grandeur variable, croissant au-delà de toute limite ou bien décroissant autant que l'on voudra, mais demeurant toujours *finie*. Je nomme cet infini, *infini improprement dit*.

a. Paru en 1883, *Mathematische Annalen*, XXI, 545-586. Traduction de J. C. Milner.

1. *Théorie des ensembles*. Par ces mots, je désigne un concept théorique très large, que jusqu'à présent, je n'ai tenté de développer que sous la forme spécialisée d'une théorie des systèmes arithmétiques ou géométriques. Par un « ensemble » ou « système », j'entends en effet de façon générale toute multiplicité qui peut être pensée comme une unité, c'est-à-dire toute collection d'éléments déterminés qui peut être par une loi combinée en un tout : je crois définir ainsi quelque chose d'apparenté à l'εἶδος ou ἰδέα platonicienne, ou aussi à ce que dans son dialogue *Philèbe ou le Souverain Bien*, Platon nomme μικτόν. Il oppose ce terme tout à la fois à l'ἄπειρον, c'est-à-dire l'illimité, l'indéterminé, ce que je nomme infini improprement dit, et au πέρας, c'est-à-dire la limite; il l'explique comme un « mélange » ordonné de ces deux derniers termes. Platon donne lui-même à entendre que ces concepts sont d'origine pythagoricienne; cf. A. Boeck, *Philolaos des Pythagoreers Lehren*, Berlin, 1819.

A côté de celui-ci, cependant, s'est constitué ces derniers temps, soit dans la géométrie, soit particulièrement dans la théorie des fonctions, un nouveau type de concepts de l'infinité, tout aussi légitime; par exemple, d'après ces notions nouvelles, dans l'examen d'une fonction analytique d'une grandeur variable complexe, l'usage s'est imposé généralement de poser dans le plan qui représente la variable complexe, un point unique, situé dans l'infini, (c'est-à-dire infiniment éloigné, mais déterminé), et de vérifier la manière dont se comporte la fonction au voisinage de ce point, comme on le fait de tout autre point; on voit alors qu'au voisinage du point infiniment éloigné, la fonction se comporte exactement de la même façon que s'il s'agissait de tout autre point situé dans le fini; on déduit de là qu'il est parfaitement légitime de se représenter l'infini dans ce cas comme transporté sur un point tout à fait déterminé.

Lorsque l'infini se présente ainsi sous une forme déterminée, je le nomme *infini proprement dit.*

Pour faire comprendre ce qui va suivre, nous distinguerons bien ces deux aspects sous lesquels s'est présenté l'infini mathématique, qui, sous les deux formes, a amené les plus grands progrès dans la géométrie, l'analyse et la physique mathématique.

Sous la première forme, en tant qu'infini improprement dit, il se propose comme un *fini variable*; sous l'autre forme, je le nomme alors infini proprement dit, il se présente comme un infini parfaitement *déterminé*. N'ont absolument rien de commun avec la première de ces deux formes (l'infini improprement dit) les nombres entiers réels infinis que j'entends définir dans ce qui va suivre et auxquels j'ai été conduit, il y a déjà de longues années, sans avoir été clairement conscient que je détenais là des nombres concrets à sens réel; au contraire, ils ont le même caractère de détermination que nous rencontrons dans le point infiniment éloigné de la théorie des fonctions analytiques; ils appartiennent dès lors aux formes et spécifications de l'*infini* proprement dit.

Cependant le point reste isolé dans l'infini du plan de nombres complexes, en face de tous les points qui sont dans le fini : au contraire, nous n'obtenons pas uniquement un seul nombre entier infini, mais une suite infinie de tels nombres, bien distincts les uns des autres et soutenant soit entre eux soit avec les nombres entiers finis des relations arithmétiques. Ces relations ne sont pas de celles que l'on peut ramener fondamentalement à des relations entre nombres finis; ce dernier phénomène a lieu fréquemment, il est vrai, mais seulement pour les degrés et les formes diverses de l'infini improprement dit, par exemple les fonctions d'une variable x qui deviennent infiniment petites ou infiniment grandes, dans le cas où, en tendant à l'infini, elles ont des numéros d'ordre finis déterminés. De telles relations peuvent de fait être considérées simplement comme des rapports dissimulés du fini ou comme immédiatement réductibles à ces derniers; les lois relatives aux nombres entiers infinis proprement dits que nous avons à définir sont au contraire fondamentalement différentes des dépendances régnant dans le fini, ce qui n'exclut pas cependant que les nombres réels finis ne puissent recevoir à leur tour certaines déterminations nouvelles à l'aide des nombres déterminés infinis.

Les *deux principes d'engendrement* à l'aide desquels, comme on le montrera, se trouvent définis les nouveaux nombres déterminés infinis, sont de telle nature que par leur action combinée, toute limite (*Schranke*) dans la formation abstraite de nombres entiers réels peut être dépassée; heureusement, comme nous le verrons, un *troisième* principe s'oppose à ceux-ci, que je nomme *principe d'arrêt* ou de *limitation*, grâce auquel certaines limites (*Schranke*) sont successivement imposées au procès de formation qui ne connaît absolument aucune fin; nous obtenons de la sorte dans la suite absolument infinie des nombres entiers réels, des divisions naturelles, que je nomme *classes de nombres*.

La *première* classe de nombre (I) est le système des nombres entiers 1, 2, 3, ..., ν, ..., vient ensuite la *seconde* classe (II), composée de certains nombres entiers infinis se suivant dans une succession déterminée; une fois la seconde classe définie, et alors seulement, l'on en vient à la troisième, puis à la quatrième etc.

L'introduction des nouveaux nombres entiers me semble de la plus grande importance, surtout pour le développement et le perfectionnement du *concept de puissance* que j'ai introduit dans mes travaux (*Journal de Crelle*, vol. 77, p. 257; vol. 84, p. 242) et que j'ai plusieurs fois employé dans les premières sections de cet essai. D'après ce concept, à tout système bien défini convient une puissance déterminée, et la même puissance est attribuée à deux systèmes quand on peut établir entre eux, d'élément à élément, une correspondance biunivoque.

Dans le cas des systèmes finis, la puissance coïncide avec le *numéral* des éléments, parce que de tels systèmes ont, comme on sait, le même numéral d'éléments pour tout arrangement.

Dans le cas des systèmes infinis, au contraire, il n'était nullement question jusqu'à présent, ni dans mes travaux, ni ailleurs, d'un *numéral* précisément déterminé de leurs éléments, mais on pouvait leur attribuer à eux aussi une puissance déterminée, totalement indépendante de leur arrangement.

La plus petite puissance revenant à des systèmes infinis devait nécessairement, comme il était aisé de le justifier, être attribuée aux systèmes pouvant être mis en correspondance biunivoque avec la *première* classe de nombres, et dès lors ayant même puissance qu'elle. Manquait en revanche jusqu'à présent une définition également simple et naturelle des puissances *plus élevées*.

Il se révèle maintenant que les classes de nombres que nous avons mentionnées plus haut, rassemblant les nombres entiers réels déterminés infinis, représentent naturellement, sous une forme homogène, les puissances croissant en suite régulière des systèmes bien définis. Je montre de la façon la plus déterminée que la puissance de la deuxième classe (II) est non seulement distincte de celle de la première, mais qu'elle est de plus en fait la puissance *immédiatement supérieure*; nous pouvons ainsi la nommer deuxième puissance ou puissance de *deuxième classe*. De même, la troisième classe fournit la définition de la troisième puissance ou puissance de troisième classe.

§ 2

Une autre acquisition importante dont il convient d'attribuer le bénéfice aux nouveaux nombres consiste à mes yeux dans un concept *nouveau*, qui ne s'était pas encore présenté jusqu'ici : le concept de *numéral* des éléments d'un ensemble infini *bien ordonné*. Étant donné que ce concept est toujours exprimé par un nombre entièrement déterminé de notre domaine de nombres élargi (pourvu seulement que soit déterminé l'ordre des éléments du système, tel que nous le définirons à l'instant); étant donné d'autre part que le concept de numéral reçoit dans notre intuition interne une représentation objective immédiate, cette solidarité entre numéral et nombre démontre pour ce dernier, même dans le cas où il est déterminé-infini, la réalité sur laquelle j'ai insisté.

Par un système bien ordonné, il faut entendre tout système bien défini dont les éléments sont coordonnés par une succession donnée de manière déterminée, d'après laquelle il existe un *premier* élément du système et d'après laquelle non seulement tout élément particulier (pourvu qu'il ne soit pas le dernier dans la succession) se trouve suivi d'un élément déterminé, mais encore à tout système arbitraire fini ou infini, appartient un élément déterminé qui dans la succession est l'élément qui les suit tous *immédiatement* (pourvu qu'il existe bien un élément qui les suive tous dans la succession) [a]. Deux systèmes bien ordonnés sont dits avoir même *numéral* (par rapport aux successions auxquelles ils ont donné lieu), lorsque leur mise en correspondance biunivoque est possible, d'une manière telle que, E et F étant deux éléments quelconques de l'un, E_1 et F_1, les éléments correspondants de l'autre, la position de E et F dans la succession du premier système s'accorde toujours avec la position de E_1 et F_1 dans la succession du deuxième système, en sorte que, si E précède F dans la succession du premier système, alors E_1 précède aussi F_1, dans la succession du second système. Lorsqu'elle est possible, cette mise en correspondance, est, comme on peut le voir aisément, toujours parfaitement déterminée, et puisque dans la série élargie des nombres il se trouve toujours un nombre α et un seul, tel que les nombres qui le *précèdent* (à partir de 1) aient le même numéral dans leur succession naturelle, l'on se trouve contraint d'égaler directement à α le numéral de ces deux systèmes « bien ordonnés », lorsque α est un nombre infiniment grand, et à $\alpha - 1$, prédécesseur immédiat de α, quand α est un nombre entier fini [b].

La différence essentielle entre les systèmes finis et infinis se révèle dès lors en ceci : un système fini présente le *même* numéral d'éléments dans *toute* succession où l'on peut en ranger les éléments; au contraire à un système composé d'éléments infiniment nombreux, reviendront en général des numéraux *différents* suivant la succession où l'on en rangera les éléments. La *puissance* d'un système, comme nous l'avons vu, est un attribut indépendant de son arrangement, mais le *numéral* de ce système se révèle un facteur dépendant de manière générale d'une succession donnée de ses éléments, dès que l'on a affaire à des systèmes infinis. Une certaine solidarité n'en subsiste pas moins, même pour les systèmes infinis, entre la *puissance* du système et le *numéral* de ses éléments, déterminé par une succession donnée.

a. Exemple ajouté par les *Acta Mathematica*, I, 393 :

Pour éclaircir: soit donné un ensemble $\{\alpha_\nu\}$ de la première puissance; on peut en former de différentes manières des *ensembles bien ordonnés*, par exemple les suivants :

$$\{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \ldots \}$$
$$\{ \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \ldots \alpha_1 \}$$
$$\{ \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \ldots, \alpha_1, \alpha_2 \}$$
$$\{ \alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_{2\nu-1}, \alpha_{2\nu+1}, \ldots \alpha_2, \alpha_\nu, \ldots, \alpha_{2\nu-2}, \alpha_{2\nu}, \ldots \}$$

b. Exemple ajouté par les *Acta Mathematica*, I, 394 :

Par exemple les trois ensembles bien ordonnés :

$$\{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \ldots \}$$
$$\{ \alpha_2, \alpha_1, \alpha_4, \alpha_3, \ldots, \alpha_{2\nu}, \alpha_{2\nu-1}, \ldots \}$$
$$\{ 1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots \}$$

ayant le même nombre [c'est-à-dire *Anzahl* ou numéral, Trad.], celui-ci se trouve d'après notre définition, égal à ω.

De même les nombres des ensembles bien ordonnés

$$\{ \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \ldots, \alpha_1 \}$$
$$\{ \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \ldots, \alpha_1, \alpha_2 \}$$
$$\{ \alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_{2\nu-1}, \alpha_{2\nu+1}, \ldots, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_{2\nu-2}, \alpha_{2\nu}, \ldots \}$$

se trouvent d'après notre définition égaux à $\omega + 1$, $\omega + 2$, 2ω.

Prenons d'abord un système ayant la puissance de la première classe et rangeons-en les éléments en une succession déterminée *quelconque*, de façon à obtenir un système « bien ordonné » : son numéral est toujours un nombre déterminé de la deuxième classe et ne peut jamais être déterminé par un nombre d'une autre classe que la deuxième. D'autre part tout système de la première puissance peut être rangé en un ordre de succession tel que son numéral, par rapport à cette succession, soit égal à un nombre de la deuxième classe, arbitrairement désigné d'avance. Nous pouvons ainsi formuler ces propositions de la manière suivante : tout système de la puissance de *première classe* est *dénombrable par* des nombres de la *deuxième* classe et par eux seulement; de fait les éléments du système peuvent toujours être rangés en une succession telle qu'il soit dénombré par un nombre de la deuxième classe, arbitrairement désigné d'avance, ce nombre exprimant le *numéral* des éléments du système par rapport à cette succession.

Des lois analogues s'appliquent aux systèmes de puissance plus élevée. Ainsi tout système bien défini de la puissance de deuxième classe est *dénombrable par* des nombres de la *troisième* classe et par eux seulement; de fait les éléments de système peuvent toujours être rangés en une succession telle qu'il soit dénombré * dans cette succession par un nombre de la *troisième* classe, *arbitrairement désigné d'avance*, ce nombre exprimant le numéral des éléments du système par rapport à cette succession.

§ 3 omis

§ 4

La série élargie des nombres entiers peut, si nos buts l'exigent, être directement complétée en un système continu par l'adjonction à tout nombre entier α de tous les nombres réels x supérieurs à zéro et inférieurs à 1.

Peut-être, en liaison avec ce point, posera-t-on la question suivante : étant donné que de cette manière, l'on obtient pour le domaine des nombres réels une extension déterminée vers l'infiniment grand, ne pourrait-on pas définir avec le même succès des nombres déterminés infiniment petits, ou, ce qui reviendrait au même, des nombres finis qui ne se confondraient pas avec les nombres rationnels ou irrationnels, (ceux-ci se posant comme limites de séries de nombres rationnels), mais pourraient s'introduire parmi les nombres réels à d'hypothétiques places intermédiaires, tout de même que les nombres irrationnels s'insèrent dans la chaîne des nombres rationnels, ou les nombres transcendants dans l'appareil des nombres algébriques ?

La question de l'établissement de telles interpolations, à laquelle certains auteurs ont donné beaucoup de peine, ne peut, à mon avis et comme je le montrerai, recevoir de réponse claire que grâce à nos nouveaux nombres, et plus précisément sur la base du concept général de numéral d'ensembles bien ordonnés; en revanche les tentatives antérieures, à ce qu'il me semble, pour une part reposent

* D'après la définition que je viens d'introduire et en même temps de préciser et généraliser, ce que j'ai appelé jusqu'à présent « dénombrable » dans les premières sections de mon essai, n'est que la capacité d'être dénombré *par* des nombres de la première classe (systèmes finis) ou *par* des nombres de la deuxième classe (systèmes de la première puissance).

sur une confusion erronée entre l'infini improprement dit et l'infini proprement dit, et pour une part ont été menées sur une base tout à fait incertaine et chancelante.

L'infini improprement dit a souvent été nommé « mauvais infini » par les philosophes modernes, ce qui est fort injuste à mon avis, puisque celui-ci s'est affirmé un instrument excellent et très utile dans la mathématique et les sciences de la nature. Les grandeurs infiniment petites, à ma connaissance, n'ont été utilement développées, jusqu'à présent, *que* sous la forme de l'infini improprement dit; c'est sous cette forme qu'elles sont susceptibles de toutes les diversités, modifications et relations qui sont requises dans l'analyse infinitésimale et la théorie des fonctions, et si elles reçoivent une expression propre, c'est afin de fonder dans ce domaine la pleine richesse des vérités analytiques. Au contraire, toutes les tentatives visant à transformer par un coup de force ces infiniment petits en infiniment petits proprement dit, devraient être enfin abandonnées et leur vanité reconnue. A supposer que des grandeurs infiniment petites proprement dites existent en quelque façon, c'est-à-dire puissent être définies, il est certain qu'elles sont sans rapport immédiat avec les habituelles grandeurs *devenant* infiniment petites.

S'opposant aux tentatives mentionnées ci-dessus concernant l'infiniment petit et à la confusion entre les deux aspects de l'infini, un point de vue se trouve fréquemment soutenu, concernant l'essence et la signification des grandeurs numériques, suivant lequel on n'accorde d'existence effective qu'aux nombres *entiers réels finis* de notre classe I.

Tout au plus accorde-t-on une certaine réalité aux nombres *rationnels* qui en procèdent immédiatement. Mais en ce qui concerne les irrationnels, il leur reviendrait dans la mathématique une signification purement *formelle*, pour autant que, se réduisant dans une certaine mesure à de simples marques de compte, ils servent à fixer les propriétés de groupes de nombres entiers et à les décrire d'une manière simple et homogène. Le matériel propre de l'analyse, suivant ce point de vue, sera exclusivement formé des nombres entiers réels finis et toutes les vérités de l'arithmétique et de l'analyse, qu'elles aient été mises au jour ou résistent encore à la découverte, seraient à concevoir comme des relations entre nombres entiers finis; l'analyse infinitésimale et, avec elle, la théorie des fonctions ne seront tenues pour légitimes que dans la mesure où leurs théorèmes pourront s'interpréter de manière démontrable comme des lois valant parmi les nombres entiers finis. A cette conception de la mathématique pure, encore que je ne puisse me trouver en accord avec elle, sont incontestablement attachés certains mérites que je voudrais ici souligner; son importance se trouve encore confirmée par le fait que parmi ses défenseurs, l'on trouve une partie des mathématiciens les plus éminents de notre temps.

Si seuls les nombres entiers finis ont une réalité, comme on le suppose ici, et si tous les autres ne sont que des formes de relation, il est alors possible d'exiger que les démonstrations des théorèmes de l'analyse soient mises à l'épreuve du point de vue de leur « contenu arithmétique », et que l'on comble conformément aux principes fondamentaux de l'arithmétique, toute lacune qui s'y révélerait; la possibilité de mener à bien cette opération est regardée comme la véritable pierre de touche de l'authenticité et de la rigueur accomplie des démonstrations. Il est indéniable que par cette méthode, il est possible de parfaire la fondation de nombreux théorèmes et d'effectuer par surcroît d'autres améliorations méthodologiques dans diverses parties de l'analyse; l'observation des principes fondamentaux qui dérivent de cette conception est de plus considérée comme une garantie contre toute espèce d'irrégularité ou de faute.

Un principe se trouve ainsi posé, assez ordinaire et trivial, mais précis et l'on recommande à tous de s'aligner sur lui : il est censé servir à maintenir l'envol de la passion spéculative et conceptuelle des mathématiques dans ses véritables limites, où elle ne court pas le danger de sombrer dans le gouffre du « transcendantal », où, comme on le dit pour éveiller une crainte et une terreur salutaires, « tout est possible ». Sans prendre parti là-dessus, l'on peut se demander si ce n'est pas précisément le souci de l'utilité qui a déterminé les premiers tenants de cette opinion à la recommander comme un principe régulateur efficace aux aspirations du talent, si aisément mises en danger par l'exubérance et la démesure, afin de les protéger contre toute erreur, et cela bien que l'on ne puisse y trouver un principe *fécond*. Car quant à supposer qu'ils soient eux-mêmes partis de ces principes fondamentaux pour mettre au jour de nouvelles vérités, cela me paraît exclu, pour la simple raison qu'à prendre ces maximes à la rigueur, je suis obligé de les considérer comme *erronées*, malgré les nombreuses qualités que je dois d'autre part leur concéder; nous ne leur devons aucun véritable progrès, et si on les avait effectivement prises pour règles, la science se serait trouvée retardée ou confinée dans les limites les plus étroites. Heureusement la situation n'est pas si grave en fait et la recommandation et l'observation de ces règles, qui sont utiles dans certains cas et sous certaines conditions, n'ont jamais été prises tellement à la lettre; il est remarquable de plus que jusqu'à maintenant, nul ne s'est présenté, à ma connaissance, pour entreprendre de les formuler de façon plus complète et plus satisfaisante que je ne l'ai tenté ici.

Si nous examinons les données historiques, nous voyons que de semblables vues ont été fréquemment soutenues et se trouvent déjà chez Aristote. Il est notoire que durant tout le Moyen Age, chez tous les scolastiques, l'énoncé « *infinitum actu non datur* » est présenté comme une proposition irréfutable, héritée d'Aristote. Mais si l'on considère les raisons qu'avance Aristote [2] contre l'existence

2. *Aristote*. Cf. la présentation de Zeller dans son grand ouvrage : *Die Philosophie der Griechen*, 3e éd., II, 2, 393-403. La conception platonicienne de l'infini est toute différente de celle d'Aristote; cf. Zeller, II, 1, 628-646. Je découvre de même dans la philosophie de Nicolas de Cuse des points communs avec mes conceptions. Cf. R. Zimmermann, *Der Cardinal Nicolaus von Cusa als Vorgänger Leibnizens* (Sitzungsberichte d. Wiener Akademie der Wiss., Jahrsg. 1852). Je fais la même remarque en ce qui concerne Giordano Bruno, qui s'inspire de N. de Cuse. Cf. Brunnhofer, *Giordano Brunos Weltanschauung und Verhängnis*, Leipzig, 1882.

Il est cependant une différence essentielle : je fixe conceptuellement une fois pour toutes au moyen des classes de nombres (I), (II), (III) etc. les divers degrés de l'infini proprement dit et c'est seulement après cela que je me donne pour tâche, non content d'approfondir mathématiquement les relations des nombres transfinis, de les reconnaître et les poursuivre également partout où ils se présentent dans la nature. Que de cette manière, nous devions aller toujours plus loin, sans jamais parvenir à une limite infranchissable, mais sans parvenir non plus à une conception même approchée de l'absolu, cela ne fait pour moi aucun doute. L'absolu peut seulement être reconnu, mais non pas connu, fût-ce de façon approchée. Car de même qu'à l'intérieur de la première classe (I), pour tout nombre fini, si grand soit-il, on a toujours devant soi la même puissance des nombres finis qui lui sont supérieurs, de même tout nombre transfini, si grand soit-il, appartenant à l'une quelconque des classes plus élevées (II) ou (III) etc., se trouve suivi d'une collection de nombres et de classes de nombres qui n'a rien perdu en puissance par rapport à la totalité de la collection absolument infinie des nombres pris à partir de 1. La situation dès lors est analogue à ce qu'A. von Haller dit de l'éternité : « Je le soustrais (le nombre démesuré) et tu (l'éternité) t'étends devant moi tout entière. » La suite absolument infinie des nombres me paraît être de ce fait, en un certain sens, un symbole adéquat de l'absolu, alors qu'au contraire, l'infinité de la première réelle de l'infini (cf. *e.g.* sa *Métaphysique*, XI, 10), elles peuvent se ramener pour l'essentiel à une présupposition impliquant une *pétition de principe* : il n'y a de nombres que *finis*, ce qu'il déduit du fait qu'il ne connaît de dénombrement que pour les systèmes finis. Je crois cependant avoir démontré précédemment — et on le verra de façon plus claire encore dans la suite de ce travail — que l'on peut pratiquer des dénombrements déterminés pour tous les systèmes, tant finis qu'infinis, à condition que l'on impose aux systèmes une loi déterminée, qui en fait des systèmes *bien ordonnés*. Que sans une telle succession, réglée par une loi, des éléments d'un système, aucun dénombrement ne puisse en être pratiqué, cela tient à la nature du concept de *dénombrement*; il en va de même pour les systèmes finis : un dénombrement ne peut en être accompli que si les éléments dénombrés se suivent en une séquence déterminée; mais il apparaît ici, comme une propriété particulière des systèmes *finis*, que le résultat du dénombrement — le *numéral* — est *indépendant* de la mise en ordre effectuée en l'occurrence, alors que pour les systèmes infinis, ainsi que nous l'avons vu, une telle indépendance *ne* se présente *pas* en général; au contraire le numéral d'un système infini est un nombre entier infini *co-déterminé* par la loi du dénombrement; c'est précisément là et là seulement que réside la différence essentielle entre le fini et l'infini, différence fondée en nature, qui de ce fait ne devrait jamais être effacée; en aucune façon cependant l'on ne pourra, au nom de cette différence, nier l'existence de l'infini et maintenir celle du fini; si l'on fait tomber l'une, l'on doit nécessairement se débarrasser aussi de l'autre; mais par cette méthode, où irions-nous ?

Un autre argument employé par Aristote contre l'actualité de l'infini, consiste à affirmer que, si l'infini existait, le fini se trouverait absorbé et détruit par celui-ci parce que, prétend-il, le nombre fini se trouve anéanti par un nombre infini; en fait, comme on le verra clairement dans la suite, les choses se présentent ainsi : pourvu que l'on pense un nombre infini comme déterminé et achevé, un nombre fini peut *fort bien* lui être adjoint et être réuni avec lui, sans que par là soit effectuée une absorption de ce dernier (c'est plutôt le nombre infini qui se trouve modifié par une telle adjonction d'un nombre fini); seul le processus *inverse*, l'adjonction d'un nombre infini à un nombre fini (posé le premier), effectue l'absorption de celui-ci, sans qu'apparaisse aucune modification de celui-là. — C'est là, concernant le fini et l'infini, l'état de choses véritable, qui a été entièrement méconnu par Aristote : il devrait donner une nouvelle impulsion non seulement à l'analyse, mais aussi à d'autres sciences, particulièrement les sciences de la nature.

Ne pas simplement considérer l'infiniment grand sous la forme de ce qui croît sans limites et sous la forme qui en dépend étroitement des séries infinies convergentes, introduites pour la première fois au XVII^e^ siècle, mais également le fixer de façon mathématique par des nombres, cette pensée s'est imposée à moi logique-

---

classe qui seule jusqu'à présent a été employée à cet effet, me semble (précisément parce que j'y vois une idée — non pas une représentation — concevable) un néant qui s'évanouit complètement à côté de la précédente. Il me paraît également remarquable que chaque classe de nombres, et donc aussi chaque puissance, soit mise en correspondance avec un nombre entièrement déterminé de la collection absolument infinie des nombres, et cela de telle façon que pour tout nombre transfini γ est donnée une puissance qui doit être nommée la γ-ème; les diverses puissances forment donc, elles aussi, une suite absolument infinie. Le fait est d'autant plus remarquable que le nombre γ qui donne l'ordre d'une puissance (au cas où le nombre γ a un prédécesseur immédiat) soutient avec les nombres de la classe qui a cette puissance, un rapport de grandeur dont la petitesse défie toute description, et cela d'autant plus que γ sera pris plus grand.

ment, presque contre ma volonté (elle était en effet contraire à des traditions qui m'étaient devenues chères) au cours d'efforts et de tentatives scientifiques s'étendant sur plusieurs années; de ce fait même, je ne crois pas qu'on puisse y opposer de raisons auxquelles je n'aie de quoi faire face.

§ 5

Par ces traditions dont j'ai parlé à l'instant, je n'entendais pas simplement au sens étroit mon expérience personnelle, mais j'y incluais les fondateurs de la philosophie et des sciences modernes. Pour trancher le débat, je citerai seulement quelques-unes des sources les plus importantes :

Locke, *Essay on human understanding*, II, chap. XVI et XVII.

Descartes, *Lettres* et éclaircissements aux *Méditations; Principia*, I, 26.

Spinoza, *Lettre XXIX; Pensées métaphysiques*, I et II.

Leibniz, éd. Erdmann, p. 148, 244, 436, 744; éd. Pertzsche, II, 1, p. 209; III, 4, p. 218; III, 5, p. 307, 322, 389; III, 7, p. 273 *.

On ne pourrait, même aujourd'hui, formuler contre l'introduction des nombres entiers infinis des arguments plus solides que ceux que l'on trouve là rassemblés; on devra les examiner en conséquence, et les comparer à ceux que j'avance en faveur de ces nombres. Je réserve pour une autre occasion un traitement exhaustif et détaillé de ces textes et particulièrement de la lettre de Spinoza à Meyer, si importante et si riche — et me limite pour le moment à ce qui suit.

Si différentes que soient les doctrines de ces auteurs, leurs textes cependant, dans le jugement qu'ils portent sur le fini et l'infini, s'accordent en ceci que la finité est censée faire partie du concept de nombre, et que d'autre part, le véritable infini ou absolu, qui est en Dieu, ne souffre aucune espèce de détermination. En ce qui concerne ce dernier point, mon accord avec eux est complet, et il ne saurait en être autrement, car le principe « *omnis determinatio est negatio* » me paraît ne pas pouvoir être mis en question; pour le premier point au contraire, comme je l'ai déjà dit en discutant les arguments d'Aristote contre l'infini en acte, j'y aperçois une pétition de principe, qui permet d'expliquer bien des contradictions que l'on rencontre chez tous ces auteurs et particulièrement Spinoza et Leibniz. L'assomption qu'en dehors de l'absolu, de ce qui ne peut être atteint par aucune détermination, et du fini, il ne devrait pas exister de modifications qui soient déterminables par des nombres, encore que non-finies, et soient par conséquent ce que j'appelle infini proprement dit — cette assomption ne me paraît justifiée par rien et à mes yeux se trouve même contredire certaines propositions avancées par ces deux derniers philosophes. Ce que j'affirme et crois avoir démontré par le présent travail ainsi que par mes tentatives antérieures, c'est qu'après le fini, il existe un *transfinitum* (que l'on pourrait aussi nommer *suprafinitum*), c'est-à-dire une échelle illimitée de modes déterminés qui par nature ne sont pas finis, mais infinis, et qui cependant peuvent être précisés, tout comme le fini, par des *nombres* déterminés, bien définis et distinguables. Ma conviction est dès lors que le domaine des grandeurs définissables *n'*est *pas* clos avec des grandeurs finies et que les limites de notre connaissance peuvent être étendues en conséquence, sans qu'il soit nécessaire pour autant de faire violence à notre nature. A la place du principe

* Sont également dignes d'attention : Hobbes, *De corpore*, chap. VII, 11; Berkeley, *Treatise on the principles of human knowledge*, 128-131.

aristotélicien et scolastique que j'ai discuté au paragraphe 4, je mets dès lors celui-ci: *Omnia seu finita seu infinita* definita *sunt et excepto Deo ab intellectu determinari possunt* [3].

Bien souvent, l'on met en avant la finité de *l'entendement* humain pour expliquer que seuls des nombres finis soient pensables; dans cette affirmation cependant, je décèle à nouveau le cercle vicieux que j'ai mentionné. C'est que par « finité de l'entendement », l'on veut dire implicitement que son pouvoir, touchant la formation des nombres, se limite aux nombres finis. Mais s'il se révèle que l'entendement peut également définir et distinguer entre eux, des nombres qui soient infinis au sens déterminé, c'est-à-dire *transfinis*, il faut alors ou bien donner aux mots « entendement fini » une signification plus large, et l'on n'en peut plus tirer la conclusion qui précède, ou bien il faut concéder à l'entendement humain aussi, d'un certain point de vue, le prédicat « infini », ce qui, à mes yeux, est la seule solution correcte. Les mots d' « entendement fini » que l'on rencontre si fréquemment, ne sont, je crois, nullement appropriés : si bornée que soit en fait la nature humaine, il y a cependant en elle une très grande part d'infini, et je vais jusqu'à soutenir que si elle n'était pas elle-même infinie sous *bien* des rapports, on ne saurait expliquer la conviction et la certitude assurées où nous nous savons tous unis, touchant l'être de l'absolu. En particulier, je tiens que l'entendement humain est doué d'une aptitude illimitée à former par progression des classes de nombres entiers, qui soutiennent une relation déterminée avec les modes infinis et en constituent les *puissances* de degré croissant.

Quant aux systèmes, extérieurement différents sans doute, mais intérieurement tout à fait parents, des deux penseurs cités en dernier lieu, la méthode que j'ai adoptée en peut, je crois, approcher de leur solution les difficultés principales, ou même, pour certaines d'entre elles, dès à présent les résoudre et les expliquer de manière satisfaisante. Ces difficultés sont ce qui a donné ultérieurement son départ au criticisme, qui, malgré tous ses mérites, ne me paraît pas remplacer de manière suffisante les doctrines de Spinoza et de Leibniz dont il a entravé le développement. Car à côté ou à la place de l'explication mécanique de la nature, qui à l'intérieur de sa sphère peut disposer de tous les appuis et avantages de l'analyse mathématique, mais dont l'unilatéralité et l'insuffisance ont été mises en lumière par Kant de manière si frappante, il n'est pas apparu jusqu'à présent, fût-ce même un commencement d'explication *organique* qui surpasse la précédente ou soit douée de la même rigueur mathématique; on ne peut, je crois, préparer la voie pour cette nouvelle explication qu'en reprenant et en poursuivant les travaux et les aspirations de l'autre.

Un point particulièrement difficile dans le système de Spinoza est le rapport des modes finis aux infinis; comment et sous quelles conditions le fini peut s'affirmer dans son autonomie en face de l'infini, ou l'infini en face de l'infini de degré plus élevé, c'est ce qui demeure chez lui sans explication. L'exemple que j'ai déjà effleuré au paragraphe 4 semble désigner dans son symbolisme aisé

3. *Determinari possunt.* Je ne puis concéder aucun être à l'indéterminé, au variable, à l'infini improprement dit, sous quelque forme qu'ils apparaissent, car ils ne peuvent être que ceci : soit des concepts de relation, soit des représentations ou intuitions (*imaginationes*) purement subjectives, en aucun cas des idées adéquates. Si donc l'on ne visait que l'infini improprement dit dans la proposition « *infinitum actu non datur* », je pourrais y souscrire, mais ce serait alors une pure tautologie. Dans les sources que j'ai mentionnées, toutefois, cette proposition me paraît plutôt signifier l'impossibilité de poser conceptuellement une infinité déterminée, et dans ce sens, je la tiens pour fausse.

la voie par où l'on peut se rapprocher peut-être d'une solution de cette question. Soit ω le premier nombre de la deuxième classe, on a $1 + \omega = \omega$; au contraire $\omega + 1 = (\omega + 1)$, où $(\omega + 1)$ est un nombre parfaitement distinct d'ω. Tout dépend donc, comme on l'aperçoit clairement ici, de la *position* du fini par rapport à l'infini; si le fini précède, il passe dans l'infini et y disparaît; s'il *cède le pas* cependant et prend place *après* l'infini, il subsiste et se combine avec celui-ci en un infini nouveau, parce que modifié.

§ 6 omis

§ 7

J'ai cité au paragraphe 5 de nombreux passages des œuvres de Leibniz, où celui-ci se prononce contre les nombres infinis, y déclarant entre autres : « Il n'y a point de nombre infini ni de ligne ou autre quantité infinie, si on les prend pour des Touts véritables », « l'infini véritable n'est pas une modification, c'est l'absolu; au contraire dès qu'on modifie on se borne ou forme un fini » (je suis d'accord avec lui sur la première proposition de ce texte, mais non sur la deuxième). Malgré cela, je suis d'autre part en mesure d'indiquer des déclarations de ce même penseur où, se contredisant lui-même jusqu'à un certain point, il se prononce de la façon la moins équivoque *en faveur* de l'infini proprement dit (distingué de l'absolu). Il déclare ainsi (Erdmann, p. 118) : « Je suis tellement pour l'infini actuel, qu'au lieu d'admettre que la nature l'abhorre, comme l'on dit vulgairement, je tiens qu'elle l'affecte partout, pour mieux marquer les perfections de son Auteur. Ainsi je crois qu'il n'y a aucune partie de la matière qui ne soit, je ne dis pas divisible, mais actuellement divisée; et par conséquent la moindre particelle doit être considérée comme un monde plein d'une infinité de créatures différentes. »

Tel cependant qu'il s'est présenté à nous par exemple dans les systèmes bien définis de points ou dans la constitution des corps en atomes ponctuels (je n'entends pas par là les atomes chimico-physiques — ceux de Démocrite —, je ne puis en effet leur reconnaître d'existence ni dans le concept ni en réalité, malgré toutes les découvertes utiles que, jusqu'à un certain point, cette fiction a permises), l'infini proprement dit a trouvé son défenseur le plus décidé dans un philosophe et mathématicien fort subtil de notre siècle, Bernard Bolzano; celui-ci a développé son point de vue sur cette question dans son ouvrage excellent et substantiel : *les Paradoxes de l'Infini*, Leipzig, 1851. Le but en est de démontrer que les contradictions recherchées dans l'infini par les sceptiques et péripatéticiens de *tous les temps* n'existent pas dès que l'on prend la peine (ce qui sans doute n'est pas toujours aisé) d'employer les concepts de l'infinité avec sérieux et conformément à leur contenu véritable. Dans cet ouvrage, l'on trouve aussi une discussion très pertinente à bien des égards de l'infini mathématique improprement dit, tel qu'il se présente dans la forme des différentielles de premier ordre et d'ordre plus élevé, dans les sommes de séries infinies ou dans les autres phénomènes de limite. Cet infini — nommé par certains scolastiques « infini syncatégorématique » — est un simple concept de relation, destiné à offrir un soutien à notre pensée, qui implique la variabilité dans sa définition et dont on ne peut jamais prédiquer au sens propre un « *datur* ».

Il est très remarquable que concernant *ce* type d'infini, il ne règne aucune différence essentielle d'opinion même parmi les philosophes modernes, si je puis en excepter certaines écoles modernes de positivistes, réalistes [4] ou matérialistes qui croient tenir *le plus haut des concepts* dans cet infini *syncatégorématique*, dont ils doivent assurer eux-mêmes qu'il n'a pas d'être *proprement dit*.

Pourtant le véritable état de choses se trouve pour l'essentiel déjà décrit en plusieurs endroits chez Leibniz; car c'est à cet infini improprement dit que se rapporte par exemple le passage suivant (Erdmann, p. 436) : « *Ego philosophice loquendo non magis statuo magnitudines infinite parvas quam infinite magnas, seu non magis infinitesimas quam infinituplas. Utrasque enim per modum loquendi compendiosum pro mentis fictionibus habeo, ad calculum aptis, quales etiam sunt radices imaginariae in Algebra. Interim demonstravi, magnum has expressiones usum habere ad compendium cogitandi adeoque ad inventionem; et in errorem ducere non posse, cum pro infinite parvo substituere sufficiat tam parvum quam quis volet, ut error sit minor dato, unde consequitur errorem dari non posse.* »

Bolzano est peut-être le seul auteur chez qui les nombres proprement infinis obtiennent quelque légitimité; du moins en est-il plusieurs fois question; cependant je ne m'accorde pas du tout avec lui sur la façon dont il en parle, sans pouvoir en construire de définition correcte et je regarde par exemple les paragraphes 29 à 33 de son livre comme incertains et erronés. Il manque à cet auteur d'avoir effectivement formé un concept général des nombres infinis déterminés; lui font aussi défaut le concept général de *puissance* et le concept spécifique de *numéral*. Tous deux apparaissent sans doute en germe chez lui dans des passages isolés,

4. *Réalistes*. Le point de vue positiviste et réaliste sur l'infini se trouve exposé par exemple dans Dühring, *Natürliche Dialektik*, Berlin, 1865, 109-135 et von Kirchmann, *Katechismus der Philosophie*, 124-130. Cf. aussi les annotations d'Ueberweg au *Traité sur les principes de la connaissance humaine* de Berkeley (Bibliothèque philosophique de von Kirchmann). Je peux seulement répéter que pour l'essentiel, je m'accorde avec tous ces auteurs sur l'appréciation de l'infini improprement dit, la seule différence est qu'ils regardent cet infini syncatégorématique comme le *seul* à pouvoir être appréhendé par des « formules » ou des concepts (et même dans le cas présent par de simples concepts de relation). Les démonstrations de Dühring contre l'infini proprement dit pourraient être considérablement abrégées et peuvent se réduire, il me semble, à l'une de ces deux assertions : ou bien que le nombre fini déterminé, si grand qu'on l'imagine, ne peut jamais être infini, ce qui suit immédiatement de son concept, ou bien que le nombre fini variable, grand au-delà de toute borne, ne peut jamais être pensé avec le prédicat de la détermination, ni dès lors celui de l'être, ce qui à nouveau résulte immédiatement de l'essence de la variabilité. Que rien par là ne se trouve obtenu qui réfute de quelque façon la possibilité de penser des nombres transfinis déterminés, cela ne fait pour moi aucun doute; et pourtant ces démonstrations sont censées réfuter la réalité des nombres transfinis. Cette argumentation me paraît analogue à celle qui voudrait conclure du fait qu'il existe d'innombrables nuances de vert, que le rouge n'existe pas. Mais il est en vérité remarquable que Dühring avoue lui-même à la page 126 de son ouvrage, que pour expliquer la « possibilité de la synthèse illimitée », un fondement est nécessaire, qu'il caractérise comme étant « naturellement tout à fait inconnu ». Ici réside, me semble-t-il, une contradiction.

Mais nous voyons également que des penseurs proches de l'idéalisme ou même y adhérant entièrement, refusent toute justification aux nombres déterminés infinis.

Dans son excellent ouvrage, *Logik*, vol. II, « Die Methodenlehre », Tübingen, 1878, Chr. Sigwart raisonne exactement comme Dühring et déclare à la page 47 : « Un nombre infini est une contradiction *in adjecto*. »

Même chose chez Kant et J. F. Fries; cf. de ce dernier *System der Metaphysik*, Heidelberg, 1824, aux paragraphes 51 et 52. Les philosophes de l'école hégelienne refusent également toute validité aux nombres infinis proprement dits; il suffit de citer l'ouvrage plein de mérites de K. Fischer : *System der Logik und Metaphysik oder Wissenschaftslehre*, 2e éd., Heidelberg, 1865, p. 275.

comme des cas particuliers, mais il ne parvient pas à une clarté et une précision entières, me semble-t-il, et par là s'expliquent de nombreuses inconséquences et même plusieurs erreurs dans cet ouvrage de haute valeur.

Sans les deux concepts que j'ai mentionnés, je suis convaincu qu'on *ne* peut faire progresser la théorie des ensembles, et cela vaut aussi, je crois, pour les domaines qui en dépendent ou sont avec elle en très étroite connexion, telles par exemple la moderne théorie des fonctions, d'une part, la logique et la théorie de la connaissance, de l'autre. A concevoir l'infini comme je l'ai fait ici et dans mes tentatives antérieures, j'éprouve un véritable plaisir (et je m'y abandonne avec reconnaissance) en voyant que le concept de nombre entier, qui, dans le fini, recouvre seulement le *numéral*, *se divise* pour ainsi dire lorsque nous montons vers l'infini, en *deux* concepts : la *puissance*, indépendante de l'ordre conféré à un système, et le *numéral*, nécessairement lié à un ordre imposé à l'ensemble d'après une loi, qui fait de ce dernier un *système bien ordonné*. Et si je redescends de l'infini vers le fini, je vois avec une clarté et une beauté égales les deux concepts ne faire à nouveau qu'un et *converger* dans le concept de nombre entier fini.

§ 8

Nous pouvons prendre la réalité ou existence des nombres entiers, tant finis qu'infinis, en *deux* sens, qui, à les prendre exactement, sont deux aspects sous lesquels on peut considérer la réalité de n'importe quel concept ou notion. Nous pouvons pour attribuer une réalité aux nombres entiers, retenir le fait que sur la base de définitions, ils occupent dans notre entendement une place tout à fait déterminée, se distinguent parfaitement de toutes les autres parties constitutives de notre pensée, entrent avec elles en des relations déterminées et ainsi modifient la substance de notre esprit d'une façon déterminée; qu'il me soit permis de nommer ce type de réalité de nos nombres, leur *réalité intrasubjective* ou *immanente* [5]. Mais l'on peut aussi, pour attribuer une réalité à ces nombres, retenir le fait qu'ils doivent être considérés comme l'expression ou la reproduction de processus et de relations existant dans le monde extérieur opposé à l'intellect, et que de plus les diverses classes de nombres I, II, III etc., représentent des puissances qui existent en fait dans la nature physique et spirituelle. J'appelle ce deuxième type de réalité, la *réalité transsubjective* ou *transcendante* des nombres entiers.

Le fondement de mes réflexions étant entièrement réaliste, mais non pas moins idéaliste, il ne fait pour moi aucun doute que ces deux types de réalité se trouvent toujours conjoints, en ce sens qu'un concept à caractériser comme existant sous le premier rapport, détient toujours aussi sous certains aspects, qui peuvent même être infiniment nombreux, une réalité transcendante [6] dont l'établissement, il

5. Ce que j'appelle ici réalité « intrasubjective » ou « immanente » des concepts ou des notions pourrait légitimement coïncider avec la détermination « adéquate » au sens où ce mot est employé par Spinoza, *Éthique*, II, def. IV : « *Per ideam adaequatam intelligo ideam quae quatenus in se sine relatione ad objectum consideratur, omnes verae ideae proprietates sive denominationes intrinsecas habet.* »

6. Cette conviction coïncide pour l'essentiel aussi bien avec les principes fondamentaux du système platonicien qu'avec un trait essentiel du système spinoziste; sur le premier point, je renvoie à Zeller, *Philosophie der Griechen*, 3ᵉ éd., II, 1, 541-602. Il y est dit tout au début du chapitre : « Seul le savoir conceptuel peut (selon Platon) garantir une véritable connaissance. Mais au degré de vérité que détiennent nos représentations — Platon partage ce présupposé avec Parménide — doit répondre un degré égal de

est vrai, est l'une des tâches les plus ardues et les plus difficiles de la métaphysique; il faut bien souvent le remettre à des temps où le développement naturel d'une autre science dévoile la signification transcendante du concept en question.

Cette solidarité entre les deux réalités a son fondement propre dans l'*unité du tout dont nous faisons partie nous-mêmes*. Si je me réfère ici à cette solidarité, c'est en vue d'en tirer une conséquence qui me paraît très importante pour la mathématique, à savoir que cette dernière doit prendre en considération pour constituer son matériel notionnel *uniquement* et *seulement* la réalité *immanente* de ses concepts, et n'est par conséquent aucunement obligée de les éprouver du point de vue de leur réalité *transcendante*. En raison de cette position éminente, qui la distingue de toutes les autres sciences et peut expliquer la manière relativement aisée et sans contrainte dont on peut la pratiquer, elle mérite tout particulièrement le nom de *mathématique libre*; et si je pouvais choisir, je donnerais la préférence à cette désignation sur celle devenue usuelle de mathématique « pure ».

La mathématique est pleinement libre dans son développement, et ne connaît qu'une seule obligation (et sur un point qui va de soi) : ses concepts doivent être non contradictoires en eux-mêmes et soutenir d'autre part avec les concepts formés antérieurement, déjà présents et assurés, des relations fixes, réglées par des définitions [7]. En particulier, pour pouvoir introduire de nouveaux nombres, elle est seulement requise d'en donner des définitions leur conférant une précision et le cas échéant une relation aux anciens nombres telles que l'on puisse dans des cas donnés les distinguer les uns des autres de manière déterminée. Dès qu'un nombre satisfait à toutes ces conditions, il peut et doit être considéré comme existant et réel dans la mathématique. Je vois dans ce fait la raison, indiquée par allusion au paragraphe 4, pour laquelle on doit accorder aux nombres rationnels, irrationnels et complexes tout autant d'existence qu'aux nombres entiers positifs finis.

Il n'est pas nécessaire, je crois, de redouter de ces principes aucun danger pour la science, comme le font bien des gens; d'une part les conditions que j'ai dites

---

réalité pour leur objet, et réciproquement. Ce qui peut être connu, est; ce qui ne peut être connu, n'est pas, et c'est dans l'exacte mesure où elle est, qu'une chose est connaissable. »

En ce qui concerne Spinoza, je n'ai qu'à rappeler sa proposition (*Éthique*, II, prop. VII) : « *Ordo et connexio idearum idem est ac ordo et connexio rerum.* »

Dans la philosophie de Leibniz également, l'on peut retrouver le même principe de théorie de la connaissance. Ce n'est que depuis l'empirisme, le sensualisme et le scepticisme modernes et depuis le criticisme kantien qui en est issu, que l'on croit devoir situer la source du savoir et de la certitude dans les sens ou les dites « formes pures de l'intuition du monde représentatif », en la confinant dans ces bornes; je suis convaincu que ces éléments ne fournissent aucune connaissance assurée, parce que cette dernière ne saurait être atteinte que par des concepts et des notions qui tout au plus sont suscités par l'expérience extérieure, mais sont pour l'essentiel formés par une induction et une déduction internes, comme une chose qui dans une certaine mesure était déjà en nous, et se trouve seulement éveillée et portée à la conscience.

7. Pour correctement former un concept, le processus est toujours le même : on pose un objet (*Ding*) dépourvu de propriétés, qui tout d'abord n'est rien qu'un nom ou un signe A, et l'on confère à celui-ci de manière ordonnée des prédicats intelligibles divers ou même infiniment nombreux, dont on peut connaître la signification par l'examen de notions déjà données, et qui ne doivent pas se contredire entre eux; ainsi se trouvent déterminées les relations de A aux concepts déjà donnés et spécialement aux concepts apparentés; quand on a mené ce procès jusqu'à son terme, toutes les conditions sont données pour éveiller le concept A qui sommeillait en nous et il parvient à l'existence tout achevé, revêtu de la réalité intrasubjective qui seule peut être requise des concepts; constater sa signification transcendante est alors la tâche de la métaphysique.

et sans l'observation desquelles la liberté de former des nombres ne peut être mise en exercice, sont telles qu'elles ne laissent à l'arbitraire qu'une place extrêmement réduite; ensuite tout concept mathématique porte en lui-même son correctif nécessaire; s'il est stérile ou inadéquat, il le manifeste très vite par son peu d'usage, et il est alors abandonné pour manque d'efficacité. En revanche toute restriction superflue imposée à l'appétit de recherche mathématique me paraît comporter un danger bien plus grave, d'autant plus grave que l'on ne peut de l'essence de la science rien tirer qui la justifie. Car *l'essence* de la *mathématique* réside précisément dans sa *liberté*.

Si même cette constitution de la mathématique ne résultait pas pour moi des raisons que j'ai dites, tout le développement de la science elle-même, tel qu'il s'est offert à nos regards durant notre siècle, devrait me conduire exactement au même point de vue.

Si Gauss, Cauchy, Abel, Jacobi, Dirichlet, Weierstrass, Hermite et Riemann s'étaient trouvés contraints de toujours soumettre leurs idées nouvelles à un contrôle métaphysique, en vérité le plaisir que nous procure le superbe édifice de la moderne théorie des fonctions nous serait refusé; celui-ci pourtant, bien que projeté et exécuté de manière totalement libre et dépourvue de tout but transcendant, a déjà manifesté sa signification transcendante par des applications à la mécanique, l'astronomie et la physique mathématique — et il ne fallait pas s'attendre à autre chose. Il ne nous serait pas donné d'observer le grand essor de la théorie des équations différentielles, amené par Fuchs, Poincaré et bien d'autres, si ces talents exceptionnels avaient été arrêtés et ligotés par des influences étrangères; et si Kummer n'avait pas pris la liberté si riche de conséquences d'introduire les nombres « idéaux » dans la théorie des nombres, nous ne serions pas en mesure aujourd'hui d'admirer les travaux algébriques et arithmétiques de Kronecker et Dedekind, si importants et remarquables.

Encore que la mathématique obtienne ainsi le droit à une entière liberté de mouvements, hors de tout lien métaphysique, je ne puis d'autre part reconnaître le même droit à la mathématique « appliquée », par exemple la mécanique analytique ou la physique mathématique; ces disciplines sont à mes yeux *métaphysiques*, dans leurs fondements aussi bien que dans leurs buts; si elles cherchent à se libérer de ce caractère, comme la chose a été récemment proposée par un physicien célèbre, elles dégénèrent alors en une « description de la nature », à qui nécessairement font défaut tout à la fois le souffle vif de la libre pensée mathématique et le pouvoir *d'expliquer* et *d'établir* les phénomènes naturels.

§ 9-10 omis

§ 11

Il convient de montrer à présent comment l'on se trouve conduit à la définition des nouveaux nombres, et de quelle manière on obtient dans la suite des nombres réels entiers absolument infinis les divisions naturelles que j'appelle *classes de nombres*. A cette analyse, je ne compte ajouter que les principaux théorèmes concernant la *deuxième* classe et son rapport à la première. La série (I) des nombres entiers réels positifs 1, 2, 3, ..., ν, ... provient en son principe de la position et de la réunion répétées d'unités qu'on a prises pour point de départ et considérées comme égales; le nombre ν exprime un nombre (*Anzahl*) fini déterminé de telles positions successives aussi bien que la réunion en un tout des unités posées. La formation des nombres entiers réels finis repose ainsi sur le principe de l'addition d'une unité à un nombre donné déjà formé; j'appelle *premier principe d'engendrement* ce facteur déterminant qui, nous le verrons bientôt, joue également un rôle essentiel dans l'engendrement des nombres entiers supérieurs. Le numéral des nombres ν de la classe I à former de cette façon est infini et parmi ces nombres, il n'en existe aucun qui soit plus grand que tous les autres. Malgré la contradiction qu'il y aurait dès lors à parler d'un nombre maximum de la classe I, il n'y a toutefois rien de choquant à imaginer un *nouveau* nombre, nous le nommerons ω*, qui servira à exprimer le fait que la collection (I) tout entière est donnée conformément à sa loi, dans sa succession naturelle. (De même que ν sert à exprimer le fait qu'un certain nombre (*Anzahl*) fini d'unités est réuni en un tout.) Il est même permis d'imaginer le nombre ω que nous venons de créer comme une *limite* vers laquelle tendent les nombres ν, à condition d'entendre seulement par là que ω doit être le premier nombre entier à suivre tous les nombres ν, c'est-à-dire doit être déclaré supérieur à chacun de ces nombres. En faisant suivre la position du nombre ω par des positions ultérieures de l'unité, l'on obtient à l'aide du premier principe d'engendrement les nombres ultérieurs : $\omega + 1$, $\omega + 2$, ..., $\omega + \nu$, ... Étant donné que par ce processus, l'on ne parvient, une fois encore, à aucun nombre maximum, on imagine un nouveau nombre, que l'on peut appeler 2ω, et qui sera le premier nombre suivant tous les nombres obtenus jusqu'à présent : ν et $\omega + \nu$; si l'on applique à nouveau au nombre 2ω le premier principe d'engendrement, on parvient à continuer comme suit les nombres obtenus jusqu'à présent :

$$2\omega + 1,\ 2\omega + 2,\ \ldots,\ 2\omega + \nu,\ \ldots$$

La fonction logique qui nous a donné les deux nombres ω et 2ω est manifestement distincte du *premier* principe d'engendrement : je l'appelle *deuxième principe d'engendrement* des nombres réels entiers et je définis plus précisément ce dernier en disant : étant donné une succession quelconque déterminée de nombres entiers réels définis, parmi lesquels il n'y en a pas qui soit plus grand que tous les autres, on crée en s'appuyant sur ce deuxième principe d'engendrement, un nouveau nombre que l'on regarde comme la limite des premiers, c'est-à-dire qui est défini comme immédiatement supérieur à tous ces nombres.

Par l'application combinée des deux principes d'engendrement, les nombres que nous avons obtenus jusqu'ici reçoivent ainsi successivement les continuations suivantes :

$$\begin{array}{l} 3\omega,\ 3\omega + 1,\ \ldots,\ 3\omega + \nu,\ \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu\omega,\ \mu\omega + 1,\ \ldots,\ \mu\omega + \nu,\ \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Toutefois nous n'en sommes pas pour autant parvenus à la fin, parce que parmi les nombres $\mu\omega + \nu$, il n'y en a pas non plus qui soit plus grand que tous les autres.

Le deuxième principe nous conduit donc à introduire un nombre qui suive immédiatement tous les nombres $\mu\omega + \nu$ et que l'on peut appeler ω^2, à ce nombre se rattacheront dans un ordre de succession déterminé des nombres $\lambda\omega^2 + \mu\omega + \gamma$, et l'on parvient évidemment alors, en appliquant les deux principes, à des nombres

* A partir de maintenant, je remplace par ω le signe ∞ que j'ai utilisé dans le n° 2 de cet essai; en effet le signe ∞ se trouve employé déjà plusieurs fois pour désigner les infinités indéterminées.

de la forme $\nu_0\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu-1} \dots + \nu_{\mu-1}\,\omega + \nu_\mu$; mais ici le deuxième principe nous amène à poser un nouveau nombre, qui devra être immédiatement supérieur à tous ces nombres et sera commodément désigné par ω^ω.

La formation de nouveaux nombres, comme on le voit, est sans fin; en appliquant les *deux* principes, l'on obtient toujours encore de nouveaux nombres et de nouvelles séries de nombres, pourvues d'une succession parfaitement déterminée.

On pourrait dès lors *s'imaginer* tout d'abord que par ce mode de formation de nouveaux nombres entiers déterminés infinis, nous devons nécessairement nous perdre dans *l'illimité*, et que nous ne sommes pas en mesure d'imposer à ce processus sans fin un terme *provisoire*, nous fournissant une limitation analogue à celle qui en un certain sens nous était objectivement donnée pour l'ancienne classe (I); il n'y était fait usage que du premier principe d'engendrement, et il était ainsi impossible de sortir de la série (I). En revanche, non seulement le *deuxième* principe nous conduit, comme il était nécessaire, au-delà du domaine de nombres donné jusque-là, mais il se révèle en fait que c'est un moyen permettant avec le *premier* principe de *franchir toute borne* (*Schranke*) dans la formation conceptuelle des nombres entiers réels.

Il suffit cependant de remarquer que tous les nombres obtenus jusqu'ici et ceux qui les suivent immédiatement satisfont une certaine condition : cette dernière, alors, *pourvu qu'on l'exige de tous les nombres à former immédiatement*, se révèle un nouveau principe, qui prend place aux côtés des deux autres, et que j'appelle *principe d'arrêt ou de limitation* : il a pour effet, comme je le montrerai, que la deuxième classe de nombres (II) (définie par l'adjonction de ce principe) n'acquiert pas seulement une puissance supérieure à celle de la classe (I), mais précisément la puissance *immédiatement supérieure*, soit la *deuxième puissance*.

La condition susdite, qui, comme on peut s'en convaincre immédiatement, se trouve satisfaite par chacun des nombres infinis α définis jusqu'ici est la suivante : le système des nombres qui dans la suite précèdent celui que l'on considère a la *puissance de la première classe* (I). Prenons par exemple le nombre ω^ω, les nombres qui le précèdent sont contenus dans la formule $\nu_0\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu-1} \dots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_\mu$, où μ, ν_0, $\nu_1 \dots \nu_\mu$ doivent prendre toutes les valeurs numériques entières positives finies, y compris zéro et à l'exclusion de la combinaison : $\nu_0 = \nu_1 = \dots = \nu_\mu = 0$. Comme on sait, ce système peut être mis sous la forme d'une série simplement infinie : il a donc la puissance de (I).

Étant donné de plus que toute suite de systèmes, ayant chacun la *première* puissance, donne toujours lieu, si cette suite est elle-même de la *première* puissance, à un nouveau système ayant la première puissance, il est clair qu'en continuant notre suite de nombres, on n'obtient *toujours effectivement* dans l'immédiat que des nombres satisfaisant bien *en fait* la condition requise.

Nous définissons donc la deuxième classe de nombres comme *la collection de tous les nombres qui pouvant être formés à l'aide des deux principes d'engendrement, et progressant suivant une succession déterminée*

$$\omega,\ \omega + 1,\ \dots,\ \nu_0\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu-1} + \dots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_\mu,\ \dots,\ \omega^\omega,\ \dots,\ \alpha \dots$$

sont soumis à la condition que tous les nombres précédant α, à partir de 1 forment un système ayant la puissance de la classe (I). [Omis : démonstration du théorème énonçant que la nouvelle classe de nombres (II) a une puissance distincte de la classe (I).]

Si cependant nous jetons auparavant un regard en arrière et nous rappelons les moyens qui nous ont permis aussi bien d'élargir le concept de nombre entier réel que de découvrir une nouvelle puissance de systèmes bien définis, trois facteurs logiques saillants ont agi, qu'il faut bien distinguer entre eux : à savoir les *deux principes d'engendrement* définis plus haut et un principe qui s'adjoint à eux : le *principe d'arrêt* ou de *limitation*, qui consiste à imposer la condition qu'on n'entreprenne de créer un nouveau nombre entier à l'aide de l'un des deux autres principes que *si* le rassemblement de tous les nombres précédents a la puissance d'une classe de nombres définie, déjà *donnée* dans toute son extension. De cette manière, en observant ces trois principes, l'on peut parvenir avec l'évidence la plus certaine à des classes de nombres toujours nouvelles, et grâce à elles, à toutes les puissances successivement croissantes et distinctes qui se présentent dans la nature physique et spirituelle, et les nouveaux nombres ainsi obtenus ont alors exactement la même précision concrète et la même réalité objective que les anciens; je ne vois donc pas, en vérité, ce qui devrait nous empêcher de travailler de cette façon à former de nouveaux nombres, dès que pour le progrès des sciences, l'introduction dans leurs développements d'une nouvelle classe parmi ces innombrables classes de nombres se révèle souhaitable ou même indispensable.

[§ 13 et 14 omis]

NOTE SUR LA TRADUCTION

La seule traduction française existant jusqu'à présent du texte qui précède est à notre connaissance la version parue en 1882 dans la première livraison des *Acta Mathematica* (p. 380-408) et rédigée par un groupe de mathématiciens (parmi lesquels, semble-t-il, Henri Poincaré), avec l'accord de Cantor qui la révisa.

En fait, il s'agit moins là d'une traduction que d'un remaniement de l'original (dont la publication dans les *Mathematische Annalen* est, il faut le remarquer, postérieure); seuls certains paragraphes ont été retenus et la disposition en a été bouleversée [1]. De plus le détail du texte est modifié; certains éclaircissements nouveaux y sont incorporés, tandis que sont supprimées la plupart des incursions hors du domaine proprement mathématique.

Notre propos était différent; si donc, ne pouvant traduire l'ensemble du texte, nous avons dû en sacrifier certaines parties, notre choix n'a pas été celui des A.M. [2]. Néanmoins, il va sans dire que, surtout dans les passages techniques, une traduction revue par l'auteur devait nous guider et nous en avons repris des passages.

En particulier, systématisant une tendance des A.M., nous avons adopté les équivalences suivantes : *Mannigfaltigkeit* = ensemble; *Menge* = système.

Nous avons de plus choisi pour *Inbegriff*, la traduction « collection ».

La traduction du mot *Anzahl* présente une difficulté : ce n'est pas à l'origine un mot technique puisqu'il désigne couramment le nombre des éléments d'une collection donnée, tandis que *Zahl* est le nombre comme entité abstraite, sans application objective (cf. l'ancienne opposition entre « nombre concret » et « nombre abstrait »). Cependant, à moins de perdre la distinction en employant *nombre* dans les deux cas, il faut forger un néologisme (nous avons choisi « numéral »), ce qui est gênant lorsqu'*Anzahl* n'a pas son sens technique. Le cas se présente une fois dans notre texte (§ 11) : le mot est alors traduit par « nombre » et précisé par *Anzahl*.

Les appels de note marqués par des lettres renvoient aux notes du traducteur.

Les notes de Cantor lui-même sont indiquées, suivant l'usage de l'original, tantôt par un astérisque, tantôt par un chiffre.

1. Sur les quatorze paragraphes de l'original, les *Acta Mathematica* (que nous désignons en abrégé par A. M.) traduisent, dans l'ordre : 1, 11, 12, 13, 2, 3, 14, 10.

2. Nous traduisons les paragraphes 1, 2, 4, 5, 7, 8, 11, 12. Sauf pour le paragraphe 12, dont nous ne reprenons que le dernier alinéa, le texte des paragraphes retenus est complet.

Bertrand Russell

La théorie des types logiques

M. Poincaré*, dans un intéressant article paru dans un récent numéro de cette revue [1], a expliqué, avec son habituelle lucidité, quelles étaient ses raisons pour ne pas accepter pleinement quelques-unes des théories, qui ont été mises en avant récemment pour expliquer les paradoxes de la logique. Étant l'un des auteurs mis en cause, je reconnais, avec gratitude, que son article n'a nullement le ton de la polémique et j'admets volontiers que, sur les points où il se plaint de n'avoir obtenu de moi que d'insuffisantes explications, l'article auquel il s'est rapporté est assurément trop concis. Comme cet article paraissait dans un journal de mathématiques, je n'avais pas voulu consacrer à l'interprétation philosophique plus de place que ce qui m'apparaissait absolument indispensable. Les critiques de M. Poincaré me montrent pourtant que certaines obscurités ont été le résultat de cet effort à être bref. Ces obscurités, j'essaierai de les dissiper dans les pages suivantes, où je me propose d'expliquer plus que de controverser.

1. La nature des fonctions propositionnelles

Il est admis que les paradoxes à éviter résultent tous d'un certain genre de cercle vicieux. Les cercles vicieux en question proviennent de ce que l'on suppose qu'une collection d'objets peut contenir des membres qui ne peuvent justement être définis qu'au moyen de la collection, prise dans sa totalité. C'est ainsi, par exemple, que la collection des « propositions » sera supposée contenir une proposition affirmant que « toutes les propositions sont ou vraies ou fausses ». Or, il semble que cette dernière affirmation ne puisse être légitime, à moins que l'expression « toutes les propositions » ne vise une certaine collection déjà définie; et cela ne peut être si de nouvelles propositions sont crées par des affirmations concernant « toutes les propositions ». Nous devrons donc dire que les affirmations concernant « toutes les propo-

* Extrait de la *Revue de Métaphysique et de Morale*, XVIII, 1910. Reproduit avec l'autorisation de Bertrand Russell.

1. « La logique de l'infini », *Revue de Métaphysique et de Morale*, juillet 1909.

sitions » sont sans signification. Plus généralement, donnons-nous un groupe d'objets tels que ce groupe, étant capable par hypothèse d'être totalisé, doive d'autre part contenir des membres qui présupposent cette totalité; alors, ce groupe ne peut pas être totalisé. En disant qu'un groupe ne peut être totalisé, vous voulons dire surtout qu'aucune affirmation ayant un sens ne peut être faite concernant « tous ses membres ». Les propositions, comme le montre l'exemple précédent, forment nécessairement un groupe qui ne peut être totalisé. Il en est de même, comme nous le verrons bientôt, des fonctions propositionnelles, même quand on se borne à ne considérer que celles qui peuvent, sans perdre tout sens, avoir comme argument un objet donné a. Dans de tels cas, il est nécessaire de décomposer notre groupe en groupes plus petits dont chacun soit capable d'être totalisé. C'est ce que la théorie des types s'efforce d'effectuer.

Les paradoxes de la logique symbolique concernent diverses sortes d'objets : propositions, classes, nombres cardinaux et ordinaux, etc. Grâce à la théorie (expliquée plus loin) qui ramène les affirmations verbalement exprimées en termes de classes et relations à des affirmations exprimées en termes de fonctions propositionnelles, ces paradoxes sont ramenés aux paradoxes concernant les propositions et les fonctions propositionnelles. Les paradoxes qui concernent les propositions sont du genre de l'*Épiménide*, et ils ne relèvent qu'indirectement de la mathématique. Les paradoxes qui intéressent plus directement le mathématicien se rapportent tous aux fonctions propositionnelles. Par « fonction propositionnelle » j'entends quelque chose qui contient une variable x et exprime une *proposition* chaque fois qu'une valeur est assignée à x. Autrement dit, elle diffère d'une proposition seulement par le fait qu'elle est ambiguë : elle contient une variable dont la valeur n'est pas assignée. Elle se rapproche des fonctions ordinaires des mathématiques en ce qu'elle contient une variable, dont la valeur n'est pas assignée; elle en diffère par le fait que les valeurs de la fonction sont des propositions. C'est ainsi, par exemple, que « x est un homme » ou « $\sin x = 1$ » est une fonction propositionnelle. Nous allons découvrir qu'on peut tomber dans le sophisme du cercle vicieux dès qu'on commence à admettre comme arguments possibles pour une fonction propositionnelle des termes qui présupposent la fonction même. Cette forme de sophisme est très instructive, et, comme nous allons le voir, on est conduit, si on veut l'éviter, à l'idée de la hiérarchie des types.

Le problème de la nature d'une fonction [2] n'est en aucune manière, une question facile. Il semblerait pourtant que la caractéristique essentielle d'une fonction soit *l'ambiguïté*. Prenons, par exemple, la loi d'identité sous la forme « A est A », qui est la forme dans laquelle elle est habituellement énoncée. Il est évident que, au point de vue psychologique, nous avons ici un simple jugement. Mais que pouvons-nous dire de l'objet de ce jugement ?

2. Quand le mot « fonction » est employé dans la suite, il signifie toujours « fonction propositionnelle ». Les autres genres de fonctions ne seront pas en question.

Nous n'affirmons pas que Socrate est Socrate, ni que Platon est Platon, ni aucun autre des jugements définis qui sont des applications de la loi d'identité. Pourtant chacun de ces jugements rentre, en un sens, dans le domaine du jugement que nous étudions. Ce qui constitue en fait, ce jugement, c'est une application ambiguë de la fonction propositionnelle « A est A ». Nous avons, semble-t-il, une simple pensée qui n'a pas d'objet défini, mais qui a, comme objet, une des valeurs de la fonction « A est A », sans la déterminer. C'est ce genre d'ambiguïté qui constitue l'essence d'une fonction. Quand nous parlons de « φx, où x n'est pas déterminé », nous désignons une valeur de la fonction, mais non une valeur définie. Nous pouvons exprimer ceci en disant que « φx » *dénote de façon ambiguë* φa, φb, φc, etc., où φa, φb, φc, etc sont les diverses valeurs de « φx ».

Quand nous disons que « φx » dénote de façon ambiguë φa, φb, φc, etc., nous voulons dire que « φx » désigne l'un des objets φa, φb, φc, etc., non pas cependant un objet défini, mais un objet indéterminé. Il suit de là que « φx » n'a un sens bien défini (entendons bien défini toujours avec cette réserve qu'il est de son essence d'être ambigu) que si les objets φa, φb, φc, etc., sont bien définis. Ce qui veut dire que la fonction n'est pas une fonction bien définie à moins que toutes ses valeurs ne soient déjà bien définies. Il suit de cela qu'aucune fonction ne peut compter parmi ses valeurs quelque chose qui présuppose la fonction, car, s'il en était ainsi, nous ne pourrions pas regarder les objets dénotés de façon ambiguë par la fonction comme définis, à moins que la fonction ne soit définie, au lieu que, inversement, comme nous venons de le voir, la fonction ne peut pas être définie, tant que ses valeurs ne sont pas définies. Ceci est un cas particulier mais peut-être le plus fondamental du principe du cercle vicieux. Une fonction est ce qui dénote de façon ambiguë quelque membre d'un certain ensemble totalisé (*a certain totality*), à savoir l'ensemble des valeurs de la fonction; par conséquent, cette totalité ne peut contenir des membres dont la notion implique la fonction elle-même, car, s'il en était ainsi, elle contiendrait des membres impliquant la totalité elle-même, ce qui, de par le principe du cercle vicieux, ne peut être réalisé dans aucune totalité.

On voit que, d'après les raisons précédemment exprimées, les valeurs d'une fonction sont présupposées par la fonction même, et non vice versa. Il va de soi assez facilement qu'en aucun cas particulier, une valeur d'une fonction ne présuppose la fonction. C'est ainsi, par exemple, que la proposition « Socrate est homme » peut être parfaitement conçue sans être regardée comme une valeur de la fonction « x est homme ». Il est vrai qu'inversement une fonction peut être conçue, sans qu'il soit nécessaire de concevoir ses valeurs séparément et individuellement. Si cela n'était pas, aucune fonction ne pourrait en effet être conçue, car le nombre des valeurs (vraies ou fausses) d'une fonction est nécessairement infini et il y a nécessairement des arguments possibles dont nous n'avons pas connaissance distincte. Ce qui est nécessaire ce n'est pas que les valeurs soient données individuellement et en extension, mais que la totalité de ces valeurs soit donnée qualitativement (*intensionnally*) de manière qu'à propos de n'importe quel objet assigné, on puisse, au moins théoriquement, déterminer si ledit objet est une valeur de la fonction, ou s'il ne l'est pas.

Il est nécessaire pratiquement de distinguer la fonction en elle-même d'une valeur indéterminée de la fonction. Nous pouvons regarder la fonction en elle-même comme ce qui dénote de façon ambiguë, tandis qu'une valeur indéterminée de la fonction est ce qui est dénoté de façon ambiguë. Si la valeur indéterminée de la fonction s'écrit « φx », nous écrirons la fonction en elle-même « $\varphi \hat{x}$ ». (N'importe quelle autre lettre pourrait être employée à la place d' x.) C'est ainsi que nous dirions « φx est une proposition » et d'autre part « $\varphi \hat{x}$ est une fonction propositionnelle ». Quand nous disons « φx est une proposition », cela signifie que nous affirmons quelque chose qui est vrai pour toute valeur possible d'x, bien que nous ne décidions pas quelle valeur x peut avoir. Nous posons une affirmation ambiguë concernant n'importe quelle valeur de la fonction. Mais quand nous disons « $\varphi \hat{x}$ est une fonction » nous ne posons pas d'affirmation ambiguë. Il serait plus correct de dire que nous posons une affirmation concernant une ambiguïté, en adoptant cette vue qu'une fonction est une ambiguïté. La fonction en elle-même $\varphi \hat{x}$, est la chose simple qui dénote de façon ambiguë ses multiples valeurs; tandis que φx, où x n'est pas déterminé, est l'un des objets dénotés, avec l'ambiguïté inhérente au procédé de dénotation.

Nous avons vu que, d'après le principe du cercle vicieux, les valeurs d'une fonction ne peuvent pas contenir de termes, qui ne seraient définissables que par cette fonction même. Soit maintenant une fonction $\varphi \hat{x}$, les valeurs à comprendre sous cette fonction [3] sont toutes les propositions de la forme φx. Il suit de là qu'il ne doit y avoir aucune proposition de la forme φx, dans laquelle x ait une valeur, qui suppose la notion de $\varphi \hat{x}$. (S'il en était ainsi, les valeurs de la fonction ne seraient pas toutes déterminées, tant que la fonction ne serait pas elle-même déterminée, tandis que nous avons trouvé, au contraire, que la fonction n'était déterminée que lorsque ses valeurs l'étaient préalablement). Il suit nécessairement de là que nous ne pouvons pas entendre une chose telle que « les valeurs à comprendre sous $\varphi \hat{x}$ » ou quelque autre argument contenant $\varphi \hat{x}$ comme l'argument pour $\varphi \hat{x}$. Autrement dit, le symbole « $\varphi(\varphi \hat{x})$ » ne peut pas exprimer une proposition, comme l'exprime « φa » quand φa est une des valeurs dénotées par $\varphi \hat{x}$. En fait, $\varphi(\varphi \hat{x})$ ne peut être qu'un symbole qui n'exprime rien : nous pourrons donc dire qu'il n'a pas de sens. Ainsi, soit une fonction quelconque $\varphi \hat{x}$, il y a des arguments pour lesquels la fonction n'a aucune valeur, aussi bien que des arguments pour lesquels la fonction a une valeur. Nous appellerons les arguments pour lesquels $\varphi \hat{x}$ a une valeur « valeurs possibles de x ». Nous dirons que $\varphi \hat{x}$ « a un sens pour l'argument x » quand $\varphi \hat{x}$ a une valeur pour l'argument x.

3. Nous emploierons les expressions « valeurs *à comprendre sous* $\varphi \hat{x}$ » (*values* for $\varphi \hat{x}$), et « valeurs de φx » (*values* of φx) pour désigner la même chose, à savoir φa, φb, φc, etc. La distinction de terminologie est destinée à éviter l'ambiguïté là où des variables différentes sont concernées, et spécialement quand l'une d'elles est une fonction.

La limitation que nous venons ainsi d'apporter au choix des arguments possibles pour $\varphi\hat{z}$, sert à résoudre un grand nombre de paradoxes. Prenons comme exemple le suivant. Supposons que « $f(\varphi\hat{z})$ » signifie « la fonction $\varphi\hat{z}$ n'est pas satisfaite si on la prend elle-même comme argument », c'est-à-dire « $\varphi(\varphi\hat{z})$ est faux ». (Si cette expression avait un sens, elle serait vraie dans tous les cas ordinaires. Par exemple, il ne peut pas être vrai que la fonction « *x* est un homme » soit un homme; si donc il est ou vrai ou faux qu'elle est un homme, il doit être faux.) Mais supposons maintenant que nous dénotions par $f(\hat{\varphi})$ la fonction dont $f(\varphi\hat{z})$ est la valeur pour l'argument $\varphi(\hat{z})$, et recherchons si $f(f\hat{\varphi})$ est vrai ou faux. Si $f(f\hat{\varphi})$ est vrai, cela signifie, de par la définition de f « $f(f\hat{\varphi})$ est faux ». Si d'autre part, $f(f\hat{\varphi})$ est faux, cela signifie, de par la définition de f « il est faux que $f(f\hat{\varphi})$ soit faux », d'où il suit que $f(f\hat{\varphi})$ est vrai. Ainsi, que nous supposions $f(f\hat{\varphi})$ vrai ou que nous le supposions faux, nous sommes conduits à une contradiction. Cette contradiction disparaît si « $\varphi(\varphi\hat{z})$ » n'a pas de sens.

Le paradoxe concernant la classe des classes qui ne sont pas membres d'elles-mêmes est également résolu par les considérations précédentes, si l'on admet qu'une classe doit toujours être définie par une fonction propositionnelle. Car, en ce cas, la classe à considérer est la clase de ces classes qui ne satisfont pas aux fonctions qui les définissent. Mais comme la classe est dérivée de la fonction, on ne peut pas, d'accord avec notre principe, la prendre comme un argument de la fonction qui la définit, et par conséquent on ne peut dire qu'elle satisfait ou ne satisfait pas la fonction qui la définit.

Quand nous disons que « $\varphi(\varphi\hat{z})$ » par exemple n'a pas de sens et n'est, par conséquent, ni vrai ni faux, il est nécessaire que nous prévenions une méprise. Si nous entendions « $\varphi(\varphi\hat{z})$ » dans le sens : « la valeur à comprendre sous $\varphi\hat{z}$ pour l'argument $\varphi\hat{z}$ est vraie, » cela ne serait pas dépourvu de sens, mais faux. Cela est faux pour la même raison que la proposition « le roi de France est chauve » est fausse, c'est-à-dire parce qu'il n'existe aucune chose telle que « la valeur à comprendre sous $\varphi\hat{z}$ pour l'argument $\varphi\hat{z}$ ». Mais quand, pour un argument *a*, nous affirmons φa, nous ne voulons pas par là affirmer « la valeur à comprendre sous $\varphi\hat{x}$ pour l'argument *a* est vraie »; nous voulons affirmer la proposition même qui *est* la valeur à comprendre sous $\varphi\hat{x}$ pour l'argument *a*. Ainsi, par exemple, si $\varphi\hat{x}$ est « $\hat{x}$ est un homme », φ (Socrate) sera « Socrate est un homme » et *non pas* « la valeur à comprendre sous la fonction '$\hat{x}$ est un homme' pour l'argument Socrate, est vraie ». Ainsi, en accord avec notre principe que « $\varphi(\varphi\hat{z})$ » n'a pas de sens, nous ne pouvons pas légitimement nier l'expression « la fonction '$\hat{x}$ est un homme' est un homme », car elle est un non-sens, mais nous pouvons légitimement nier l'expression « la valeur à comprendre sous la fonction '$\hat{x}$ est un homme' pour l'argument '*x* est un homme' est vraie, » et cela, non pas en nous fondant sur ce fait que la valeur en question est fausse, mais sur ce fait qu'il n'existe aucune valeur de ce genre à comprendre sous la fonction.

Nous dénoterons par le symbole « $(x) \cdot \varphi x$ » la proposition « φx toujours » (φx *always*), c'est-à-dire la proposition qui affirme *toutes* les valeurs [4] à comprendre sous $\varphi\hat{x}$. Cette proposition enveloppe la fonction $\varphi\hat{x}$ elle-même, et non pas seulement une valeur ambiguë de la fonction. L'affirmation de φx, où x n'est pas déterminé, est une affirmation différente de celle qui affirme toutes les valeurs à comprendre sous $\varphi\hat{x}$, car la première est une affirmation ambiguë, alors que la seconde ne présente aucune ambiguïté. On observera que « $(x) \cdot \varphi x$ » n'affirme pas « φx pour toutes valeurs d'x », parce que, comme nous l'avons vu, il y a nécessairement des valeurs de x pour lesquelles « φx » n'a pas de sens. Ce qui est affirmé par « $(x) \cdot \varphi x$ », ce sont toutes les propositions qui constituent les valeurs à comprendre sous $\varphi\hat{x}$; il suit de là que c'est seulement pour les valeurs d'x, qui donnent un sens à « φx », c'est-à-dire pour tous les arguments *possibles*, que φx est affirmé, lorsque nous affirmons « $(x) \cdot \varphi x$ ». Ainsi, on exprimerait convenablement « $(x) \cdot \varphi x$ » par « φx est vrai pour toutes les valeurs possibles de x ». Cette expression est cependant moins précise que l'expression « φx toujours », parce que la notion de *vérité* ne fait pas partie du contenu du jugement. Quand nous jugeons « tous les hommes sont mortels », nous croyons à la vérité de notre jugement, mais la notion même de vérité n'est pas nécessairement présente à notre esprit, pas plus que quand nous jugeons « Socrate est mortel ».

2. Définition et systématique ambiguïté des notions de vérité et d'erreur

Puisque « $(x) \cdot \varphi x$ » enveloppe la fonction φx, on ne peut, d'après notre principe, l'employer comme un argument de φ, ce qui veut dire que le symbole « $\varphi\ \{(x) \cdot \varphi x\}$ » est nécessairement dépourvu de sens. Ce principe semblerait, à première vue, présenter certaines exceptions. Prenons, par exemple, la fonction « p est faux » et considérons la proposition « $(p) \cdot p$ est faux ». Celle-ci devrait être une proposition affirmant toutes les propositions de la forme « p est faux ». Nous serions tentés de dire qu'une telle proposition est nécessairement fausse, parce que « p est faux » n'est pas toujours vrai. Nous serions conduits par là à la proposition

« $\{ (p) \cdot p$ est faux $\}$ est faux »

c'est-à-dire que nous serions conduits à une proposition dans laquelle « $(p) \cdot p$ est faux » est l'argument de la fonction « $\hat{p}$ est faux » ce que nous avons déclaré impossible. D'ailleurs on voit que, dans ce qui précède, « $(p) \cdot p$ est faux » prétend être une proposition concernant toutes propositions, et que, de par la forme générale du principe du cercle vicieux, il ne

4. J'emploie « toujours » dans le sens de « en tous les cas » et non pas « en tous les temps ». De même « quelquefois » signifiera « en quelques cas ».

peut y avoir de propositions concernant *toutes* propositions. Il semble évident toutefois qu'étant donné une fonction quelconque, il y a une proposition (vraie ou fausse) qui affirme toutes les valeurs qu'elle peut prendre. Nous sommes donc conduits à cette conclusion que « p est faux » et « q est faux » ne doivent pas toujours être les valeurs, pour les arguments p et q d'une fonction simple « p est faux »; or, cela n'est possible que seulement si le mot « faux » a en réalité plusieurs sens différents, appropriés aux propositions de genres différents.

Que les mots « vrai » et « faux » ont des sens différents, selon le genre de propositions auquel ils sont appliqués, il n'est guère difficile de le voir. Prenons une fonction quelconque $\varphi\,\hat{x}$ et soit φa une de ses valeurs. Appelons le genre de vérité, applicable à « φa » vérité *du premier genre* (*first truth*). (Ceci n'implique pas que cette proposition ait une vérité du premier genre dans un autre contexte, mais veut simplement indiquer qu'elle a le premier genre de vérité dans notre contexte.) Considérons maintenant la proposition $(x) \cdot \varphi x$. Si elle possède la vérité selon le genre qui lui est approprié, cela signifiera que chacune des valeurs φx a « une vérité du premier genre ». Ainsi, si nous appelons le genre de vérité approprié à $(x) \cdot \varphi x$ « vérité du second genre », nous pouvons définir « $\{ (x) \cdot \varphi x \}$ a une vérité du second genre » comme signifiant que « toute valeur à comprendre sous $\varphi\hat{x}$ a une vérité du premier genre », c'est-à-dire « $(x) \cdot$ (φx a une vérité du premier genre) ». De même, si nous dénotons par « $(\exists x) \cdot \varphi x$ » la proposition « φx quelquefois », ou, comme on peut l'exprimer de façon moins précise « φx pour quelques valeurs d'x », nous trouvons que $(\exists x) \cdot \varphi x$ a une vérité du second genre s'il y a un x pour lequel φx a une vérité du premier genre; ainsi nous pouvons définir » $\{ (\exists x) \cdot \varphi x \}$ a une vérité du second genre » comme signifiant « quelques valeurs à comprendre sous $\varphi\hat{x}$ ont une vérité du premier genre », c'est-à-dire « $(\exists x) \cdot$ (φx a une vérité du premier genre) ». De semblables remarques s'appliquent à la notion de fausseté. Ainsi « $\{ (x) \cdot \varphi x \}$ a une fausseté du second genre » signifiera « quelques valeurs à comprendre sous $\varphi\hat{x}$ ont une fausseté du premier genre », c'est-à-dire « $(\exists x) \cdot$ (φx a une fausseté du premier genre »; au contraire « $\{ (\exists x) \cdot \varphi x \}$ a une fausseté du second genre » signifiera « toutes les valeurs à comprendre sous $\varphi\hat{x}$ ont une fausseté du premier genre », c'est-à-dire « $(x) \cdot \varphi x$ a une fausseté du premier genre) ». Ainsi le genre de fausseté qui peut convenir à une proposition générale est différent de celui qui convient à une proposition particulière.

Si nous appliquons ces considérations à la proposition « $(p) \cdot p$ est faux » nous voyons que le genre de fausseté en question doit être déterminé. Si par exemple c'est la fausseté du premier genre qui est visée, la fonction « p a une fausseté du premier genre » n'a de sens que si p est l'espèce de proposition qui a fausseté ou vérité du premier genre. Il suit de là que « $(p) \cdot p$ est faux » sera remplacé par une affirmation qui équivaut à « toutes les propositions ayant ou une vérité du premier genre ou une fausseté du premier genre ont une fausseté du premier genre». Cette proposition a une fausseté du *second* genre, et n'est pas un argument possible pour la fonction « p a une fausseté du premier genre ». Ainsi l'exception apparente à notre principe « $\varphi \{ (x) \cdot \varphi x \}$ ne peut avoir de sens », disparaît. Il va de soi que les considérations précédentes s'appliquent parfaitement à la solution du paradoxe de l'*Epiménide*.

Par de semblables considérations nous viendrons à bout de rendre compte de « non-*p* » et de « *p* ou *q* ». Il peut sembler que ces expressions sont des fonctions dans lesquelles *n'importe quelle* proposition peut apparaître comme argument. Mais cela est dû à une ambiguïté systématique dans les significations de « non » et « ou », par lesquelles ces expressions s'adaptent à des propositions d'un ordre quelconque. Pour expliquer complètement comment ceci se produit il semble bon de commencer par une définition du genre le plus simple de *vérité* et de *fausseté*.

L'univers se compose d'objets ayant des qualités diverses et se tenant en diverses relations. Quelques-uns de ces objets qui se présentent dans l'univers sont complexes. Quand un objet est complexe, il se compose de parties entre lesquelles il existe des relations. Considérons un objet complexe composé de deux parties *a* et *b*, se tenant l'une à l'autre dans la relation R. L'objet complexe « *a*-en-relation-R-avec-*b* » peut être capable d'être perçu, et quand il est perçu, il est perçu comme un objet unique. L'attention peut montrer qu'il est complexe; nous *jugeons* alors que *a* et *b* sont dans la relation R. Un tel jugement, dérivé d'une perception par un simple effort d'attention, peut être appelé « jugement de perception ». Ce jugement de perception, considéré à son tour comme un fait réel qui se présente, est une relation de quatre termes, à savoir *a*, *b*, R et le sujet percevant. La perception en elle-même, au contraire, est une relation de deux termes, à savoir *a*-en-relation-R-avec-*b*, et le sujet percevant. Puisque un objet de perception ne peut être un pur néant, nous ne pouvons pas percevoir « *a*-en-relation-R-avec-*b* » à moins que *a* ne soit en relation R avec *b*. Par conséquent, un jugement de perception, d'après la précédente définition, doit être vrai. Cela ne signifie pas que, dans un jugement qui nous *apparait* être un jugement de perception, nous soyons sûrs de n'être pas dans l'erreur; car nous pouvons nous tromper en pensant que notre jugement a été réellement dérivé de la perception par une simple analyse. Mais si notre jugement a été ainsi dérivé, il doit être nécessairement vrai. En fait, nous pouvons définir la *vérité*, quand il s'agit de tels jugements, comme consistant en ce fait qu'il existe un objet complexe *correspondant* à la pensée discursive qui est le jugement. Ce qui revient à dire que, quand nous jugeons « *a* a la relation R à *b* », notre jugement est dit *vrai* quand il existe un objet complexe « *a*-en-relation-R-avec-*b* », et *faux* quand ce n'est pas le cas. Ceci est une définition des notions de vérité et de fausseté, en relation avec les jugements de cette espèce.

On voit que, d'après les explications précédentes, le jugement n'a pas un objet simple, à savoir la proposition, mais plusieurs objets ayant entre eux des relations. Autrement dit, la relation qui constitue le jugement n'est pas une relation entre deux termes, à savoir l'esprit qui juge et la proposition, mais une relation entre plusieurs termes, à savoir l'esprit et ce qu'on une fausseté du premier genre ». Ainsi l'exception apparente à notre principe « $\varphi \{ (x) \cdot \varphi x \}$ ne peut avoir de sens », disparaît. Il va de soi que les considérations précédentes s'appliquent parfaitement à la solution du paradoxe de l'*Epiménide*.

Par de semblables considérations nous viendrons à bout de rendre compte de « non-*p* » et de « *p* ou *q* ». Il peut sembler que ces expressions sont des fonctions dans lesquelles *n'importe quelle* proposition peut apparaître comme argument. Mais cela est dû à une ambiguïté systématique dans les significations de « non » et « ou », par lesquelles ces expressions s'adaptent à des propositions d'un ordre quelconque. Pour expliquer complètement comment ceci se produit il semble bon de commencer par une définition du genre le plus simple de *vérité* et de *fausseté*.

L'univers se compose d'objets ayant des qualités diverses et se tenant en diverses relations. Quelques-uns de ces objets qui se présentent dans l'univers sont complexes. Quand un objet est complexe, il se compose de parties entre lesquelles il existe des relations. Considérons un objet complexe composé de deux parties *a* et *b*, se tenant l'une à l'autre dans la relation R. L'objet complexe « *a*-en-relation-R-avec-*b* » peut être capable d'être perçu, et quand il est perçu, il est perçu comme un objet unique. L'attention peut montrer qu'il est complexe; nous *jugeons* alors que *a* et *b* sont dans la relation R. Un tel jugement, dérivé d'une perception par un simple effort d'attention, peut être appelé « jugement de perception ». Ce jugement de perception, considéré à son tour comme un fait réel qui se présente, est une relation de quatre termes, à savoir *a*, *b*, R et le sujet percevant. La perception en elle-même, au contraire, est une relation de deux termes, à savoir *a*-en-relation-R-avec-*b*, et le sujet percevant. Puisque un objet de perception ne peut être un pur néant, nous ne pouvons pas percevoir « *a*-en-relation-R-avec-*b* » à moins que *a* ne soit en relation R avec *b*. Par conséquent, un jugement de perception, d'après la précédente définition, doit être vrai. Cela ne signifie pas que, dans un jugement qui nous *apparait* être un jugement de perception, nous soyons sûrs de n'être pas dans l'erreur; car nous pouvons nous tromper en pensant que notre jugement a été réellement dérivé de la perception par une simple analyse. Mais si notre jugement a été ainsi dérivé, il doit être nécessairement vrai. En fait, nous pouvons définir la *vérité*, quand il s'agit de tels jugements, comme consistant en ce fait qu'il existe un objet complexe *correspondant* à la pensée discursive qui est le jugement. Ce qui revient à dire que, quand nous jugeons « *a* a la relation R à *b* », notre jugement est dit *vrai* quand il existe un objet complexe « *a*-en-relation-R-avec-*b* », et *faux* quand ce n'est pas le cas. Ceci est une définition des notions de vérité et de fausseté, en relation avec les jugements de cette espèce.

On voit que, d'après les explications précédentes, le jugement n'a pas un objet simple, à savoir la proposition, mais plusieurs objets ayant entre eux des relations. Autrement dit, la relation qui constitue le jugement n'est pas une relation entre deux termes, à savoir l'esprit qui juge et la proposition, mais une relation entre plusieurs termes, à savoir l'esprit et ce qu'on appelle les constituants de la proposition. Quand nous jugeons (ou disons) « ceci est rouge », le résultat est une relation des trois termes, l'esprit, « ceci » et rouge. D'autre part quand nous *percevons* « la rougeur de ceci, » il y a une relation de deux termes, à savoir l'esprit et l'objet complexe « la rougeur de ceci ». Pour chaque jugement porté, il y a une certaine entité complexe, composée de l'esprit et des divers objets du jugement. Quand le jugement est *vrai*, il lui correspond, pour l'espèce de jugements que nous avons considérée, un tout complexe des *objets* du jugement et d'eux seuls. La fausseté au contraire, en ce qui concerne cette classe de jugement, consiste dans l'absence d'un complexe correspondant, composé des seuls objets du jugement. Il suit de la théorie précédente qu'une « proposition », prise au sens où la proposition est supposée être l'*unique* objet du jugement, est une fausse abstraction, parce qu'un jugement a plusieurs objets distincts, et non pas un seul. C'est la pluralité des objets dans le jugement (en opposition avec la perception) qui a conduit les philosophes à parler de la pensée comme « discursive », bien qu'on ne semble pas s'être clairement rendu compte de ce qui est signifié par cette épithète.

Par suite de cette pluralité des objets dans un simple jugement, on voit que ce qu'on appelle « proposition » (dans le sens où elle est distinguée de la phrase qui l'exprime) n'est pas du tout une seule entité. Autrement dit, la phrase qui exprime une proposition est ce que j'ai appelé un symbole « incomplet »; il n'a pas de sens en lui-même mais demande qu'on supplée à son insuffisance d'une certaine manière pour acquérir un sens complet. Ceci est en quelque manière dissimulé par cette circonstance que le fait même de juger fournit à la proposition un complément suffisant et que ce fait même de juger n'ajoute « *verbalement* » rien à la proposition. Ainsi « la proposition 'Socrate est homme' » emploie 'Socrate est homme' dans un sens qui veut être complété d'une certaine manière pour acquérir une pleine signification; mais, quand je juge « Socrate est homme », le sens est complété par l'acte même de juger et nous n'avons plus désormais de symbole incomplet. Le fait que les propositions sont des « symboles incomplets » est philosophiquement important et il intéresse sur certains points la logique symbolique.

Les jugements à qui nous avons eu affaire jusqu'à présent sont de la forme des jugements de perception, c'est-à-dire que leurs sujets sont toujours particuliers et définis. Mais il existe de nombreux jugements qui ne sont pas de cette forme. Tels sont : Tous les hommes sont mortels; J'ai rencontré un homme; Quelques hommes sont grecs. Avant de nous occuper de ces jugements, nous allons introduire quelques termes techniques.

Nous appelons « un complexe » tout objet tel que « a en relation R à b », ou « a ayant la qualité q », ou « a, b, c se tenant entre eux dans la relation S ». Bref, un *complexe* est tout objet quelconque qui se présente dans l'univers et n'est pas simple. Nous disons qu'un jugement est *élémentaire* quand il exprime de simples affirmations telles que : « a a la relation R à b », « a a la qualité q », ou « a, b, c se tiennent entre eux dans la relation S ». D'après cela, un jugement *élémentaire* est vrai quand il existe un complexe correspondant, et faux quand il n'existe pas de complexe correspondant.

Mais prenons maintenant une proposition comme « tous les hommes sont mortels ». Ici le jugement ne correspond pas à *un seul* complexe mais à plusieurs, à savoir « Socrate est mortel », « Platon est mortel », « Aristote est mortel », etc. (Il n'est pas nécessaire, pour le moment, avant d'en être arrivé aux complexes ultimes enveloppés dans les jugements, de rechercher si chacun de ces jugements ne réclame pas une explication plus profonde. Pour la clarté de l'exposition, le jugement « Socrate est mortel » est traité ici comme un jugement élémentaire, quoiqu'en fait, il n'en soit pas un, comme on l'expliquera plus loin. Il n'est pas très facile de découvrir des jugements vraiment élémentaires.) Je n'entends pas nier qu'il puisse y avoir une certaine relation du concept *homme* au concept *mortel* qui soit *équivalente* à l'expression « tous les hommes sont mortels », mais, en tout cas, cette relation n'est pas ce que nous affirmons quand nous disons : tous les hommes sont mortels. Notre jugement que tous les hommes sont mortels rassemble en lui une quantité de jugements élémentaires. Il n'est pourtant pas composé de ceux-ci, car, par exemple, le fait que Socrate est mortel n'est pas une partie de ce que nous affirmons, comme on peut le voir en faisant attention que notre affirmation peut être comprise par une personne qui n'a jamais entendu parler de Socrate. Afin de comprendre le jugement « tous les hommes sont mortels », il n'est pas nécessaire de savoir quels hommes existent. Nous devons admettre par conséquent comme une espèce radicalement nouvelle de jugements les affirmations générales telles que : « tous les hommes sont mortels ». Nous affirmons qu'étant donné qu'x est homme, x est toujours mortel, c'est-à-dire que nous affirmons « x est mortel » de *tout* x qui est homme. Ainsi nous sommes capables de juger (à tort ou à raison, peu importe) que *tous* les objets qui ont quelque propriété déterminée ont par là même quelque autre propriété déterminée. Ce qui revient à dire qu'étant donné des fonctions propositionnelles quelconques $\varphi\hat{x}$ et $\psi\hat{x}$, il y a un jugement qui affirme ψx de tout x pour lequel nous avons φx. Ces jugements, nous les appellerons *jugements généraux*.

Il est évident, comme on l'a expliqué précédemment, que la définition de la *vérité* est différente dans le cas des jugements généraux de ce qu'elle est dans le cas des jugements élémentaires. Appelons le sens où nous entendons la *vérité* des jugements élémentaires : « vérité élémentaire ». Alors, quand nous affirmons qu'il est vrai que tous les hommes sont mortels, nous entendrons que tous les jugements de la forme « x est mortel », quand x est un homme, ont une vérité élémentaire. Nous pouvons définir ceci comme la « vérité du second ordre ». Dès lors, si nous exprimons la proposition « tous les hommes sont mortels » dans la forme

$$\text{« } (x) \cdot x \text{ est mortel, quand } x \text{ est un homme »}$$

et si nous appelons ce jugement p, alors « p est vrai » devra être pris dans le sens « p a une vérité du second ordre », ce qui en retour signifie

«$(x) \cdot$ 'x est mortel' a une vérité élémentaire, quand x est un homme ».

Nous pouvons employer le symbole « $(x) \cdot \varphi x$ » pour exprimer le jugement général qui affirme tous les jugements de la forme « φx ». Alors le jugement « tous les hommes sont mortels » est équivalent à

« $(x) \cdot$ 'x est un homme' implique 'x est un mortel' ».

C'est-à-dire, à

« $(x) \cdot x$ n'est pas un homme, ou x est mortel ».

La signification de *vérité*, applicable à cette proposition, n'est donc pas la même que la signification de *vérité* applicable à 'x est un homme ' ou à 'x est mortel '; et, d'une façon générale, dans un jugement quelconque $(x) \cdot \varphi x$, le sens dans lequel le jugement est ou peut être vrai n'est pas le même que le sens dans lequel φx est ou peut être vrai. Si φx est un jugement élémentaire, il est vrai quand il *désigne* un complexe correspondant. Mais $(x) \cdot \varphi x$ ne désigne pas un simple complexe correspondant : les complexes qui lui correspondent sont aussi nombreux que les valeurs possibles de x.

Il suit de ce qui précède qu'une proposition telle que « tous les jugements portés par Épiménide sont vrais », sera, dès le premier abord, capable de vérité seulement si tous les jugements qu'elle vise sont du même ordre. S'ils sont d'ordres différents, le n^{ieme} étant le plus élevé, nous pouvons faire n affirmations de la forme « tous les jugements d'ordre m, portés par Épiménide sont vrais, où m prend toutes les valeurs jusqu'à n. Mais aucun de ces jugements ne peut se comprendre lui-même dans son propre domaine, car un tel jugement est toujours d'ordre plus élevé que les jugements auxquels il se rapporte.

Considérons maintenant ce que signifie la négation d'une proposition de la forme « $(x) \cdot \varphi x$ ». Notons, pour commencer, que « φx en quelques cas », ou « φx quelquefois » est un jugement qui est à mettre sur le même pied que « φx en tous cas » ou « φx toujours ». Le jugement « φx quelquefois » est vrai s'il existe une ou plusieurs valeurs d'x pour lesquelles x est vrai.Nous exprimerons la proposition « φx quelquefois » par la notation « $(\exists x) \cdot \varphi x$ », où « $\exists$ » signifie « il existe un... » et l'ensemble du symbole peut être lu « il existe un x tel que φx ». Nous prenons les deux genres de jugement exprimés par « $(x) \cdot \varphi x$ » et « $(\exists x) \cdot \varphi x$ » comme idées primitives. Nous prenons aussi comme une idée primitive la négation d'une proposition *élémentaire*. Nous pouvons dès lors définir les négations de « $(x) \cdot \varphi x$ » et $(\exists x) \cdot \varphi x$. La négation d'une proposition quelconque p sera dénotée par le symbole « $\sim p$ ». Dès lors la négation de « $(x) \cdot \varphi x$ » signifiera, *par définition*, « $(\exists x) \cdot \sim \varphi x$ ». Ainsi dans le langage traditionnel de la logique formelle, on définit la négation d'une universelle affirmative comme la particulière négative, et la négation de la particulière affirmative comme l'universelle négative. Par conséquent la signification de la négation pour de telles propositions est différente de la signification de la négation pour les propositions élémentaires.

Une explication analogue s'applique à la disjonction. Considérons l'expression « ou p, ou φx toujours », et dénotons la disjonction de deux propositions p et q par « $p \vee q$ ». Alors notre expression s'écrit « $p \cdot \vee \cdot (x) \cdot \varphi x$ ». Nous supposerons que p est une proposition élémentaire et que φx est toujours aussi une proposition élémentaire. Nous prenons la disjonction de deux propositions élémentaires comme une idée primitive et nous désirons *définir* la disjonction « $p \cdot \vee \cdot (x) \cdot \varphi x$ ». Cela peut être défini comme « $(x) \cdot p \vee \varphi x$ », c'est-à-dire que l'expression « ou p est vrai, ou φx est toujours vrai » doit être entendue « 'p ou φx' est toujours vrai ». En même façon, nous définirons « $p \cdot \vee \cdot (\exists x) \cdot \varphi x$ » comme $(\exists x) \cdot p \vee \varphi x$ », c'est-à-dire que l'expression « ou p est vrai, ou il y a un x pour qui φx est vrai » doit être entendue par définition comme « il y a un x pour qui ou p ou φx est vrai ». Nous pouvons définir de même la disjonction de deux propositions universelles : « $(x) \cdot \varphi x \cdot \vee \cdot (y) \cdot \psi y$ » signifiera par définition « $(x, y) \cdot \varphi x \vee \psi y$ »; c'est-à-dire que l'expression « ou φx est toujours vrai, ou ψy est toujours vrai » doit signifier « 'φx ou ψ' est toujours vrai ». Par cette méthode, nous obtenons des définitions de disjonctions contenant des propositions de la forme $(x) \cdot \varphi x$ ou $(\exists x) \cdot \varphi x$ en fonction de disjonctions de propositions élémentaires; mais la signification de « disjonction » n'est pas la même pour des propositions de la forme $(x) \cdot \varphi x$, ou $(\exists x) \cdot \varphi x$ que pour les propositions élémentaires.

De semblables explications pourraient être données à propos de l'implication et de la conjonction, mais il n'est pas nécessaire, puisqu'on peut les définir en fonction de la négation et de la disjonction.

3. Pourquoi une fonction donnée requiert des arguments d'un certain type

Les considérations, présentées auparavant en faveur de cette idée qu'une fonction ne peut, sans perdre tout sens, avoir comme argument quelque expression supposant dans sa définition la notion même de la fonction, l'ont été d'une façon plus ou moins indirecte. Mais en étudiant directement les espèces de fonctions qui ont des fonctions comme argument et les espèces de fonctions qui ont des arguments autres que des fonctions, nous verrons, si je ne me trompe, que non seulement il est impossible pour une fonction $\varphi \hat{z}$ de se prendre elle-même (ou quelque notion dérivée d'elle) comme argument, mais que, si $\psi \hat{z}$ est une autre fonction telle qu'il y ait des arguments a pour lesquels φa et ψa ont un sens, alors $\psi \hat{z}$ (ou quelque expression dérivée de $\psi \hat{z}$) ne peut, sans perdre tout sens, être argument de $\varphi \hat{z}$. Cela résulte de ce fait qu'une fonction est essentiellement une expression présentant une ambiguïté : dès lors, si elle intervient comme élément d'une proposition définie, elle doit intervenir d'une manière telle que l'ambiguïté ait disparu et qu'une expression pleinement déterminée en résulte. Quelques exemples rendront ceci plus clair. Ainsi « $(x) \cdot \varphi x$ » que nous avons déjà considéré, est une fonction de $\varphi \hat{x}$: dès que $\varphi \hat{x}$ est déterminé, nous avons donc une proposition définie, exempte de toute ambiguïté. Mais on voit facilement que nous ne pouvons pas substituer à la fonction quelque chose qui n'est pas une fonction; « $(x) \cdot \varphi x$ » signifie en effet « φx en tous cas » ; le sens que nous lui donnons ainsi dépend de ce fait qu'il y a des « cas » pour φx, c'est-à-dire dépend de l'ambiguïté qui est la caractéristique d'une fonction. Cet exemple montre clairement que, quand une fonction intervient comme argument, d'une manière qui présente un sens, une expression qui n'est pas une fonction ne peut, en même façon, intervenir comme argument. Mais inversement, quand une expression qui n'est pas une fonction peut intervenir comme argument d'une manière qui présente un sens, une fonction ne peut de même intervenir. Prenons par exemple l'expression « x est un homme » et considérons « $\varphi \hat{x}$ est un homme ». Ici, rien ne fait disparaître l'ambiguïté qui caractérise $\varphi \hat{x}$; aucun objet défini n'est donc dit être un homme. Une fonction, en fait, n'est pas un objet défini, qui pourrait être ou n'être pas un homme; c'est simplement une expression ambiguë qui attend une détermination, et afin qu'elle puisse intervenir comme argument d'une manière qui présente un sens, elle doit recevoir nécessairement la détermination qu'elle ne reçoit évidemment pas, si on la substitue simplement à un élément déterminé dans une proposition. Cet argument ne vaut pourtant pas directement contre une expression telle que « $\{ (x) \cdot \varphi x \}$ est un homme ». Le sens commun jugerait qu'une telle expression n'a pas de sens, mais elle ne peut pourtant être condamnée sur le prétexte de l'ambiguïté de son sujet. Nous avons besoin ici d'une autre raison, que voici : une proposition n'est pas une entité simple, mais une relation entre plusieurs entités; donc, une expression dans laquelle une proposition se présente comme sujet n'aura de sens que si elle peut être ramenée à une expression concernant les termes qui interviennent dans la proposition. Comme dans les phrases telles que « le n'importe quoi » (*the so-and-so*), où grammaticalement il apparaît comme sujet, une proposition doit être décomposée en ses constituants, si vous voulons trouver le vrai sujet ou les vrais sujets. Mais dans une expression telle que « p est un homme », où p est une proposition, cela n'est pas possible. Il suit de là que « $\{ (x) \cdot \varphi x \}$ est un homme » n'a pas de sens.

4. La hiérarchie des fonctions et propositions

Nous sommes ainsi conduits, par la double voie du principe du cercle vicieux et de l'observation directe, à cette conclusion que les fonctions, dont un objet donné a peut être un argument, sont incapables de se servir mutuellement d'arguments entre elles, et qu'elles ne peuvent avoir aucun terme commun avec les fonctions dont elles peuvent être arguments. Nous sommes ainsi amenés à construire une hiérarchie. Commençant par

a et les autres termes qui peuvent être arguments des mêmes fonctions dont a peut être l'argument, nous arrivons tout d'abord aux fonctions dont a est l'argument possible, puis aux fonctions dont de telles fonctions sont les arguments possibles, et ainsi de suite. Mais la hiérarchie qui est à construire n'est pas aussi simple qu'il peut paraître au premier abord. Les fonctions qui peuvent prendre a comme argument ne forment qu'illégitimement un ensemble totalisé et, pour elle-mêmes, elles demandent à être divisées en une hiérarchie de fonctions. On voit facilement ceci comme suit. Soit $f(\varphi\hat{z}, x)$ une fonction de deux variables, $\varphi\hat{z}$ et x. Si dès lors, regardant x comme fixe momentanément, nous affirmons cette expression pour toutes valeurs possibles de φ, nous obtenons une proposition :

$$(\varphi) \cdot f(\varphi\hat{z}, x).$$

Si x est variable, nous avons ici une fonction d'x mais comme cette fonction implique l'ensemble total des valeurs de $\varphi\hat{z}$ [5], elle ne peut pas elle-même être comprise dans cet ensemble, de par le principe du cercle vicieux. Il suit de là que l'ensemble total des valeurs de $\varphi\hat{z}$, visé dans l'expression $(\varphi) \cdot f(\varphi\hat{z}, x)$ n'est pas l'ensemble total de toutes les fonctions dans lesquelles x peut intervenir comme argument, et qu'il n'existe aucun ensemble tel que celui de toutes les fonctions dans lesquelles x peut intervenir comme argument.

Il suit de ce qui précède que la notion même d'une fonction dans laquelle $\varphi\hat{z}$ apparaît comme argument implique que « $\varphi\hat{z}$ » ne désigne pas *n'importe quelle* fonction, capable d'un argument donné, mais doit être entendue en un sens restreint de telle manière qu'aucune des fonctions, valeurs possibles de $\varphi\hat{z}$, ne contienne quelque référence à l'ensemble total de ces fonctions. Prenons comme exemple la définition de l'identité. Nous pouvons essayer de définir « x est identique à y » comme « tout ce qui est vrai d'x est vrai d'y », c'est-à-dire φx en tous cas implique φy. Mais ici, puisque nous désirons affirmer toutes les valeurs de « φx implique φy », regardé comme fonction de φ, nous serons forcés d'imposer à φ une certaine limitation, qui nous empêchera de comprendre parmi les valeurs de φ les valeurs dans lesquelles sont concernées « toutes les valeurs possibles de φ ». Ainsi, par exemple, « x est identique à a » est une fonction d'x; dès lors, si c'est une valeur légitime de φ dans l'expression « φx en tous cas implique φy », nous serons capables d'inférer, au moyen de la définition précédente, que si x est identique à a et x identique à y, alors y est identique à a. Bien que la conclusion soit valable, le raisonnement renferme un cercle vicieux, car nous avons pris « $(\varphi) \cdot \{\varphi x \text{ implique } \varphi a\}$ » comme une valeur possible de φx, ce qui ne peut être. Et si, pourtant, nous apportons une limitation quelconque à φ, il peut arriver, autant qu'on le voit à présent, que pour d'autres valeurs de φ, nous puissions avoir φx vrai et φy faux ; si bien que

5. Quand nous parlons de « valeurs de $\varphi\hat{z}$ », c'est φ et non pas z qui est visé. Ceci ressort de l'explication donnée dans la note de la page 56.

notre définition proposée de l'identité serait évidemment erronée. Cette difficulté est évitée par « l'axiome de réductibilité » qui sera expliqué plus loin. Nous ne l'avons mentionnée maintenant que pour montrer la nécessité et l'intérêt de la hiérarchie des fonctions d'un argument donné.

Donnons le nom de « *a*-fonctions » aux fonctions qui ont un sens pour un argument donné *a*. Supposons alors que nous choisissions un certain groupe de *a*-fonctions, et considérons la proposition « *a* satisfait toutes les fonctions appartenant au groupe en question ». Si nous remplaçons ici *a* par une variable, nous obtenons une *a*-fonction; mais, de par le principe du cercle vicieux cette *a*-fonction ne peut pas être membre de notre groupe, puisqu'elle contient une référence à l'ensemble du groupe. Posons que le groupe est formé de toutes les fonctions qui satisfont $f(\varphi\hat{z})$. Alors notre nouvelle fonction est

$$(\varphi) \,.\, \{ f(\varphi\hat{z}) \text{ implique } \varphi x \}$$

où x est l'argument. Il apparaît ainsi que, quel que soit le groupe d'*a*-fonctions que nous puissions choisir, il y aura d'autres *a*-fonctions qui resteront en dehors de ce groupe. On obtiendra toujours de telles fonctions, comme l'exemple précédent le montre, en prenant une fonction de deux arguments $\varphi\hat{z}$ et x et en affirmant le tout des valeurs résultant des variations de φ. Ce qui est nécessaire, par conséquent, afin d'éviter les cercles vicieux, c'est de diviser nos *a*-fonctions en « types », dont chacun ne contient aucune fonction, se rapportant au type considéré dans son ensemble.

Quand quelque chose est affirmée ou niée de toutes les valeurs possibles d'une variable ou de quelques valeurs possibles indéterminées de cette variable, celle-ci est dite *apparente*, suivant Peano. La présence des mots *tout* ou *quelque* dans une proposition indique la présence d'une variable apparente; mais souvent une variable apparente est réellement présente là où le langage ne la décèle pas. C'est ainsi par exemple que « A est mortel » signifie « il existe un temps où A mourra »; ainsi, un temps variable apparaît comme variable apparente.

Les exemples les plus clairs de propositions ne contenant pas de variables apparentes sont celles qui expriment des jugements de perception immédiats, par exemple « ceci est rouge » ou « ceci est douloureux » où « ceci » désigne quelque chose d'immédiatement donné. Dans d'autres jugements, même là où à première vue il ne semble y avoir aucune variable apparente, il arrive souvent qu'il y en a réellement une. Prenons par exemple « Socrate est homme ». Pour Socrate lui-même, le mot « Socrate » désignait sans aucun doute un objet dont il avait connaissance immédiate, et le jugement « Socrate est homme » ne contenait aucune variable apparente. Mais pour nous, qui ne connaissons Socrate que par ouï-dire, le mot « Socrate » ne peut pas signifier ce qu'il signifiait pour Socrate lui-même; il signifie plutôt « la personne qui a telles et telles propriétés », mettons « le philosophe athénien qui but la ciguë ». De plus, dans toutes les propositions concernant « l'objet qui a telles et telles propriétés » il y a une variable apparente, comme je l'ai montré ailleurs [6]. Ainsi, dans ce que *nous* avons à l'esprit quand nous disons « Socrate est homme » il y a une variable apparente, quoiqu'il n'y ait pas de variable apparente dans le jugement correspondant, lorsqu'il est fait par Socrate, à condition toutefois que nous supposions qu'il y ait une chose telle que la connaissance immédiate de soi-même.

Quels que soient les exemples de propositions ne contenant pas de variables apparentes, il est clair que les fonctions propositionnelles dont les valeurs ne contiennent pas de variables apparentes sont la source de propositions qui en contiennent, au sens où la fonction $\varphi\hat{x}$ est la source de la proposition $(x) \cdot \varphi x$. Car les valeurs à comprendre sous $\varphi\hat{x}$ ne contiennent pas la variable apparente x qui se montre dans $(x) \cdot \varphi\hat{x}$; si elles contiennent une variable apparente y, celle-ci peut être éliminée en même façon et ainsi de suite. Ce progrès ne va pas à l'infini, car les propositions que nous pouvons appréhender ne peuvent contenir plus qu'un nombre fini de variables apparentes, en raison de ceci que tout ce que nous pouvons concevoir doit nécessairement n'avoir qu'une complexité finie. Nous devons ainsi arriver en dernière analyse à une fonction d'autant de variables qu'il y a eu d'étapes franchies pour l'atteindre à partir de notre proposition originelle, et cette fonction sera telle que ses valeurs ne contiendront plus de variables apparentes. Nous pouvons appeler cette fonction la *matrice* de notre proposition originelle et de toute autre proposition ou fonction, obtenue en transformant quelques-uns des arguments de la fonction en variables apparentes. Ainsi, par exemple, si nous avons une fonction-matrice, dont les valeurs soient $\varphi\ (x, y)$, nous en dériverons

$(y) \cdot \varphi\ (x, y)$ qui est une fonction d'x
$(x) \cdot \varphi\ (x, y)$ qui est une fonction d'y
$(x, y)\ .\ \varphi\ (x, y)$ qui signifie « $\varphi\ (x, y)$ est vrai pour toutes valeurs possibles d'x et y ».

Cette dernière expression est une proposition qui ne contient aucune variable *réelle*, c'est-à-dire, qui ne contient plus que des variables apparentes.

Il est évident que toutes les propositions et fonctions possibles peuvent être obtenues à partir de matrices, en transformant dans les matrices les arguments en variables apparentes. Afin de diviser nos propositions et fonctions en types, nous partirons donc des matrices, et examinerons comment on doit les diviser pour éviter tout cercle vicieux dans les définitions des fonctions visées. Dans ce but, nous emploierons les lettres telles que $abcxyzw$ pour dénoter des objets qui ne sont ni des fonctions ni des propositions. Ces objets, nous les appelons *individus*; ils seront les constituants des propositions et fonctions, *vrais* constituants, en ce sens que l'analyse ne les résout pas comme, par exemple, les classes ou les phrases telles que « le tel-ou-tel ».

6. *Mind*, Octobre 1905, « On denoting ».

Les premières matrices qui se présentent sont celles dont les valeurs ont l'une des formes

$$\varphi x,\ \psi(x, y),\ \chi\ (x, y, z...)$$

c'est-à-dire, où les arguments, quelque nombreux qu'ils soient, sont tous des individus. Les fonctions φ, ψ, χ,... qui, par définition, ne contiennent aucune variable apparente et n'ont que des arguments-individus ne présupposent, dans leur notion, aucun ensemble total de fonctions. A partir de ces fonctions ψ, χ,... nous pouvons procéder à la formation d'autres fonctions d'x, telles que $(y) \cdot \psi\ (x, y)$, $(\exists y) \cdot \psi\ (x, y)$, $(\exists z) \cdot \chi\ (x, y, z)$, $(y) : (\exists z) \cdot \chi\ (x, y. z)$, et ainsi de suite. Toutes ces fonctions ne présupposent aucun autre ensemble total que celui des individus. Nous arrivons ainsi à l'idée d'une certaine collection de fonctions d'x, caractérisées par ceci quelles ne comprennent d'autres variables que des individus. Ces fonctions, nous les appellerons « fonctions du premier ordre ».

Nous pouvons maintenant introduire une notation pour « n'importe quelle fonction du premier ordre ». Nous la dénoterons par « $\varphi ! \hat{x}$ » et une valeur quelconque, à comprendre sous une telle fonction sera dénotée par « $\varphi ! x$ ». Ainsi « $\varphi ! x$ » désigne une valeur quelconque à comprendre sous une fonction quelconque qui ne contient que des individus comme variables. On voit par là que « $\varphi ! x$ » est lui-même une fonction de *deux* variables, à savoir $\varphi ! \hat{z}$ et x. Donc $\varphi ! \hat{x}$ contient une variable qui n'est pas un individu, à savoir $\varphi ! \hat{z}$. De même « $(x)\ .\ \varphi ! x$ » est une fonction de la variable $\varphi ! \hat{z}$, et, ainsi, contient une variable qui n'est pas un individu. Continuons encore : si a est un individu donné, l'expression

« $\varphi !x$ implique $\varphi ! x$ pour toutes valeurs possibles de φ »

est une fonction d'x, mais non de la forme $\varphi ! x$, car elle contient une variable (apparente) φ qui n'est pas un individu. Donnons le nom de « prédicat » à une fonction quelconque du premier ordre $\varphi ! \hat{z}$. (Cet emploi du mot « prédicat » est strictement réservé à l'objet de la présente discussion.) Alors l'expression « $\varphi ! x$ implique $\varphi ! a$ pour toutes valeurs possibles de φ » peut être lue « tous les prédicats d'x sont les prédicats de a ». Ceci donne lieu à une affirmation concernant x, mais n'attribue pas à x un *prédicat*, au sens spécial qui vient d'être défini.

En raison de l'introduction de $\varphi ! \hat{z}$, nous avons maintenant un nouveau groupe de matrices. Ainsi, « $\varphi ! x$ » est une fonction qui ne contient aucune variable apparente, mais contient les deux variables réelles $\varphi ! \hat{z}$ et x. (On observera que quand $\varphi !$ est déterminé, nous pouvons obtenir une fonction dont les valeurs enveloppent des individus comme variables apparentes, par exemple si $\varphi ! x$ est $(y).\ \chi\ (x, y)$; mais aussi longtemps que φ est variable,$\varphi ! x$ ne contient aucune variable apparente.) De même, si a est un individu défini, $\varphi ! a$ est une fonction d'une variable $\varphi ! \hat{z}$. Si a et b sont des individus définis, « $\varphi ! a$ implique $\psi ! b$ » est une fonction de deux variables $\varphi \hat{z}$ et $\psi \hat{z}$, et ainsi de suite. Nous sommes ainsi amenés à un ensemble de matrices nouvelles,

$$f(\varphi\,!\,\hat{z}),\; g\,(\varphi\,!\,\hat{z},\, \psi\,!\,\hat{z}),\; F(\varphi\,!\,\hat{z},\, x),\ \text{etc.}$$

Ces matrices contiennent des individus et des fonctions du premier ordre comme arguments, mais (comme toutes les matrices) aucune variable apparente. Une telle matrice, si elle contient plus d'une variable, donne naissance à de nouvelles fonctions d'une variable, par la transformation de tous ses arguments à l'exception d'un seul en variables apparentes. Ainsi, nous obtenons les fonctions

$$(\varphi) \cdot g\,(\varphi\,!\,\hat{z},\, \psi\,!\,\hat{z}) \text{ qui est une fonction de } \psi\,!\,\hat{z}$$
$$(x) \cdot F\,(\varphi\,!\,\hat{z},\, x) \text{ qui est une fonction de } \varphi\,!\hat{z}$$
$$(\varphi) \cdot F\,(\varphi\,!\hat{z},\, x) \text{ qui est une fonction d'} x.$$

Nous donnerons le nom de *matrices du second ordre* aux matrices qui ont des fonctions du premier ordre parmi leurs arguments et n'en ont pas d'autres que ces fonctions et des individus. (Il n'est d'ailleurs pas *nécessaire* qu'elles aient des individus parmi leurs arguments.) Nous donnerons le nom de *fonctions du second ordre* aux fonctions qui ou bien sont des matrices du second ordre, ou bien sont dérivées de ces matrices par transformation de quelques-uns de leurs arguments en variables apparentes. On voit que l'argument d'une fonction du second ordre peut être ou un individu ou une fonction du premier ordre. Les fonctions du second ordre sont celles qui contiennent des variables qui sont des fonctions du premier ordre mais ne contiennent aucune autre variable, sauf (peut-être) des individus.

Nous avons maintenant à notre disposition diverses nouvelles classes de fonctions. En premier lieu nous avons des fonctions du second ordre à un seul argument, qui est une fonction du premier ordre. Nous dénoterons une fonction variable de ce genre par le symbole $f\,!\,(\hat{\varphi}\,!\,\hat{z})$ et une valeur quelconque d'une telle fonction par $f\,!\,(\varphi\,!\,\hat{z})$. Comme $\varphi\,!\,x$, l'expression $f\,!\,(\varphi\,!\,\hat{z})$ est une fonction de deux variables, à savoir $f\,!\,(\hat{\varphi}\,!\,\hat{z})$ et $\varphi\,!\,\hat{z}$. Parmi les valeurs possibles de $f\,!\,(\varphi\,!\,\hat{z})$ se trouveront $\varphi\,!\,a$, où a est constant, $(x) \cdot \varphi\,!\,x$, $(\exists x) \cdot \varphi\,!\,x$, etc. (Ces valeurs s'obtiennent en donnant une valeur déterminée à f et en laissant φ indéterminé.) Nous appellerons ces fonctions « fonctions prédicatives des fonctions du premier ordre ».

En second lieu, nous avons des fonctions du second ordre à deux arguments dont l'un est une fonction du premier ordre, tandis que l'autre est un individu. Dénotons les valeurs indéterminées de telles fonctions par le symbole

$$f\,!\,(\varphi\,!\,\hat{z},\, x).$$

Aussitôt qu'x prend une valeur déterminée, nous avons une fonction prédicative de $\varphi\,!\,z$. Si notre fonction ne contient aucune fonction du premier ordre comme variable apparente, nous obtiendrons une fonction prédicative d'x en assignant une valeur à $\varphi\,!\,\hat{z}$. Ainsi, pour prendre le cas le plus simple, si $f\,!\,(\varphi\,!\,\hat{z},\, x)$ est $\varphi\,!\,x$, le fait d'assigner une valeur à φ nous donne une fonction prédicative d'x, en vertu de la définition de « $\varphi ! x$ ». Mais si $f ! (\varphi ! \hat{z}, x)$ contient une fonction du premier ordre comme variable apparente, le fait d'assigner une valeur à $\varphi ! \hat{z}$ nous donne une fonction du second ordre d'x.

En troisième lieu, nous avons des fonctions du second ordre d'individus. Celles-ci seront toutes dérivées des fonctions de la forme $f ! (\varphi ! \hat{z}, x)$ en transformant φ en une variable apparente. Nous n'avons donc pas besoin pour elles d'une nouvelle notation.

Nous avons aussi des fonctions du second ordre de deux fonctions du premier ordre, ou de deux fonctions de ce genre et d'un individu, et ainsi de suite.

Nous pouvons maintenant passer à l'étude exactement semblable des matrices du troisième ordre. Ce seront des fonctions contenant des fonctions du second ordre comme arguments, ne contenant aucune variable apparente, ni d'autres arguments que des individus, des fonctions du premier et du second ordre. De là, nous passerons, comme précédemment, aux fonctions du troisième ordre, et nous pourrons continuer ainsi indéfiniment. Si la variable d'ordre le plus élevé intervenant dans une fonction, — qu'elle soit un argument ou une variable apparente, — est une fonction du n^e-ordre, la fonction où elle intervient sera du $n + 1^{eme}$ ordre. Nous n'arrivons pas aux fonctions d'ordre ω, parce que le nombre des arguments et des variables apparentes dans une fonction doit être fini, et par là toute fonction doit nécessairement être d'ordre fini. Puisque les ordres de fonctions ne se définissent que degré par degré, on ne peut procéder au « passage à la limite », et des fonctions d'ordre infini ne peuvent se présenter.

Nous définirons une fonction d'une variable comme *prédicative* quand elle est de l'ordre immédiatement plus élevé que l'ordre de son argument, c'est-à-dire quand elle est de l'ordre le plus petit qu'elle est obligée d'avoir pour posséder cet argument. Si une fonction a plusieurs arguments et si l'ordre le plus élevé des fonctions qui interviennent en elle comme arguments est le n^e, nous appellerons la fonction prédicative, si elle est de l'ordre $n + 1$, ou, en d'autres termes, si elle est de l'ordre le plus petit qu'elle soit obligée d'avoir pour posséder l'argument qui est le sien. Une fonction de plusieurs arguments est prédicative quand l'un de ses arguments est tel que, quand nous assignons une valeur aux autres, nous obtenons une fonction prédicative de l'argument resté indéterminé.

Il est important de noter que toutes les fonctions possibles dans la hiérarchie précédente peuvent être obtenues par le moyen de fonctions prédicatives et de variables apparentes. Ainsi, comme nous l'avons vu, les fonctions du second ordre d'un individu x sont de la forme

$$(\varphi) . f! (\varphi ! \hat{z}, x), \text{ ou } (\exists \varphi) . f! (\varphi ! \hat{z}, x) \text{ ou } (\varphi . \psi) f! (\varphi ! \hat{z}, \psi ! \hat{z}, x), \text{ etc.}$$

où f est une fonction prédicative du second ordre. Et d'une manière générale, on obtient une fonction non prédicative du n^e ordre, à partir d'une fonction prédicative du n^e ordre, en transformant tous les arguments de l'ordre $n - 1$ en variables apparentes. (D'autres arguments peuvent aussi être transformés en variables apparentes.) Ainsi nous n'avons pas besoin d'introduire comme variables d'autres fonctions que les fonctions prédicatives. Bien plus, pour obtenir une fonction quelconque d'une variable unique x, nous n'avons pas besoin d'aller au-delà des fonctions prédicatives de *deux* variables. Car la fonction $(\psi) \cdot f!(\varphi!\hat{z}, \psi!\hat{z}, x)$, où f est donné, est une fonction de $\varphi!\hat{z}$ et x et elle est prédicative. Elle est donc de la forme $F!(\varphi!\hat{z}, x)$ et par conséquent, $(\varphi, \psi) \cdot f!(\varphi!\hat{z}, \psi!\hat{z}, x)$ est de la forme $(\varphi). \ F!(\varphi!\hat{z}, x)$. Ainsi, d'une manière générale, en procédant par degrés, nous trouvons que, si $\varphi!\hat{u}$ est une fonction prédicative d'un ordre suffisamment élevé, toute fonction déterminée d'x non-prédicative sera de l'une des deux formes

$$(\varphi) \cdot F!(\varphi!\hat{u}, x) \qquad (\exists\varphi) \cdot F!(\varphi!\hat{u}, x)$$

où F est une fonction prédicative de $\varphi!\hat{u}$ et x.

La nature de la précédente hiérarchie des fonctions peut être, en résumé, expliquée comme suit. Une fonction, comme nous l'avons vu à un stade antérieur de la discussion, présuppose, comme une partie essentielle de sa signification, l'ensemble total de ses valeurs, ou, ce qui revient au même, l'ensemble total de ses arguments possibles. Les arguments d'une fonction peuvent être des fonctions, ou des propositions, ou des individus. (On se souvient que les individus sont définis comme ce qui n'est ni une proposition, ni une fonction.) Pour le moment, nous négligeons le cas où l'argument d'une fonction est une proposition. Considérons une fonction dont l'argument est un individu. Cette fonction présuppose l'ensemble total des individus; mais, à moins qu'elle ne contienne une fonction comme variable apparente, elle ne présuppose aucun ensemble total de fonctions. Si, pourtant, elle contient une fonction comme variable apparente, alors elle ne peut être définie, tant que quelque ensemble total de fonctions n'a pas été défini. Il suit de là que nous sommes obligés de définir d'abord l'ensemble total des fonctions qui ont des individus comme arguments et ne contiennent aucune fonction comme variables apparentes. Ce sont les fonctions *prédicatives* d'individus. D'une manière générale, une fonction prédicative d'un argument variable est celle qui n'implique d'autre ensemble total que celui des valeurs possibles de l'argument et ceux qui sont présupposés par l'un quelconque des arguments possibles. Ainsi une fonction prédicative d'un argument variable est toute fonction qui peut recevoir une détermination, sans qu'on introduise de nouveaux genres de variables, qui ne soient pas nécessairement présupposés par la variable qui est l'argument.

Une théorie presque exactement semblable peut être développée à propos des propositions. Les propositions qui ne contiennent aucune fonction ni variable apparente peuvent être appelées *propositions élémentaires*. Les propositions non élémentaires qui ne contiennent aucune fonction, ni autres variables apparentes que des individus, peuvent être appelées *propositions du premier ordre*. (On observera qu'aucune variable autre que les variables *apparentes* ne peut se rencontrer dans une proposition, puisque toute expression qui contient une variable *réelle* est fonction et non proposition.) Les propositions élémentaires et de premier ordre seront ainsi les valeurs des fonctions de premier ordre. (On se souviendra qu'une fonction n'entre pas comme constituant dans l'une de ses valeurs : c'est ainsi, par exemple, que la fonction « $\hat{x}$ est homme » n'est pas un constituant de la proposition « Socrate est homme ».) Les propositions élémentaires et de premier ordre ne présupposent donc aucun ensemble total, sauf, tout au plus, l'ensemble total des individus. Elles sont de l'une ou l'autre des trois formes

$$\varphi\,!a;\ (x)\cdot\varphi\,!x;\ (\exists x)\cdot\varphi\,!x;$$

où $\varphi\,!x$ est une fonction prédicative d'un individu. Il suit de là que si p représente une proposition élémentaire ou de premier ordre, variable, une fonction fp est ou $f(\varphi\,!a)$, ou $f\{(x)\cdot\varphi\,!x\}$, ou $f\{(\exists x)\cdot\varphi\,!x\}$. Ainsi une fonction d'une proposition élémentaire ou de premier ordre peut toujours être ramenée à une fonction d'une fonction du premier ordre. Il suit de là qu'une proposition, dont l'expression contient l'ensemble total des propositions du premier ordre, peut être ramenée à une proposition dont l'expression contient l'ensemble total des fonctions du premier ordre; et cela naturellement s'applique également aux ordres plus élevés. La hiérarchie des propositions peut, par conséquent, être dérivée de la hiérarchie des fonctions, et nous pouvons définir une proposition du n^e ordre comme la proposition qui contient une variable apparente d'ordre $n - 1$ dans la hiérarchie des fonctions. La hiérarchie des propositions est d'emploi nul en pratique et n'offre d'intérêt que pour la solution des paradoxes; il n'est donc pas nécessaire d'entrer dans plus de détails sur les types de propositions.

5. L'axiome de réductibilité

Il reste à examiner l' « axiome de réductibilité ». On voit que, d'après la hiérarchie précédente, aucun jugement ne peut être porté, sans perdre tout sens, concernant « toutes les a-fonctions » où a est un certain objet donné. Ainsi, une notion telle que « toutes les propriétés de a » signifiant « toutes les fonctions qui sont vraies pour l'argument a » n'est pas légitimement formée. Il nous faudra distinguer l'ordre de fonctions visé. Nous pouvons parler de « toutes les propriétés prédicatives de a », de « toutes les propriétés du second ordre de a », etc. (Si a n'est pas un individu, mais un objet d'ordre n, on entendra, par « les propriétés du second ordre de a » l'expression « fonctions d'ordre $n+2$ vérifiées par a ».) Mais nous ne pouvons pas parler de « toutes les propriétés de a ». Dans certains cas particuliers, nous pouvons rencontrer des jugements portés sur « toutes les propriétés d'ordre n de a », quel que soit n. Dans de pareils cas, il n'y a pratiquement pas d'inconvénient à regarder le jugement comme porté sur « toutes les propriétés de a », pourvu que nous nous souvenions que c'est là en réalité une pluralité de jugements et non un jugement unique, qui pourrait être regardé comme affirmant une nouvelle propriété de a, en outre de toutes les propriétés. De tels cas contiendront toujours quelque ambiguïté systématique semblable à celle que contenait la signification du mot « vérité » comme il a été expliqué précédemment. Par suite de cette ambiguïté systématique, on sait qu'il est possible parfois de comprendre dans un jugement exprimé verbalement de façon simple ce qui enveloppe en réalité un certain nombre de jugements différents, correspondant à des ordres différents de la hiérarchie. Ceci apparaît clairement dans le cas du menteur, où le jugement « Tous les jugements de A sont faux » devrait être décomposé en jugements différents, se rapportant aux jugements d'ordres divers portés par le menteur, et faisant correspondre à chacun d'eux un genre spécial de fausseté.

L'axiome de réductibilité est introduit afin de justifier une multitude de raisonnements, où, *au premier aspect*, nous avons affaire à des notions telles que « toutes les propriétés de *a* » ou « toutes les *a*-fonctions », et dans lesquels, néanmoins, il semble difficilement possible de soupçonner quelque erreur importante. M. Poincaré estime que l'axiome de réductibilité ne peut être en réalité qu'une autre forme de l'axiome de l'induction mathématique. Ce n'est pourtant aucunement le cas. L'axiome de réductibilité a un domaine beaucoup plus général : il est utilisé en de nombreuses questions de pure logique où l'induction mathématique n'a rien à faire [7]. C'est cette utilité que je dois maintenant expliquer.

Si nous appelons *prédicat* d'un objet une fonction prédicative qui est vraie de cet objet, alors seront prédicats d'un objet seulement des propriétés déterminées de cet objet. Soit par exemple une proposition telle que « Napoléon a eu toutes les qualités qui font un grand général ». Nous pouvons l'interpréter dans le sens « Napoléon a eu tous les prédicats qui font un grand général ». Nous avons ici un prédicat qui est une variable apparente. Si nous posons « $f(\varphi\,!\hat{z})$ » pour « $\varphi\,!\hat{z}$ est un prédicat requis chez un grand général », notre proposition est

$$(\varphi) \;:\; f(\varphi\,!\hat{z}) \text{ implique } \varphi\,! \text{ (Napoléon).}$$

Puisque cette expression vise un ensemble total de prédicats, elle n'est pas elle-même un prédicat de Napoléon. Il ne suit pas de là, pourtant, qu'il n'y ait aucun prédicat commun aux grand généraux et à eux seuls. En fait, il est certain qu'il existe un tel prédicat. Le nombre des grands généraux est en effet fini et chacun d'eux a possédé certainement quelque prédicat, que n'a possédé aucun autre homme, par exemple, le fait d'être né à tel instant précis. La disjonction de ces prédicats donnera lieu à un prédicat commun aux

7. L'explication que donne M. Poincaré de l'axiome d'induction mathématique (*Revue de Métaphysique et de Morale*, novembre 1906, p. 867) peut être résumée comme suit : Une classe *récurrente* est celle à qui 0 appartient, et à qui $n+1$ appartient si n lui appartient. Un nombre *inductif* est celui qui appartient à toute classe récurrente. Un nombre *fini* est un nombre tel que $n < n+1$. Dès lors, l'axiome d'induction exprime que tout nombre-fini est inductif. A mon sens, cet axiome, bien loin d'être évident, est extrêmement douteux : je doute moi-même le plus profondément de sa vérité. Il n'y a en outre qu'un petit nombre de propositions mathématiques qui soient rendues illégitimes en le supposant faux. Et il n'est nullement impossible qu'on puisse montrer ultérieurement qu'il est capable d'être prouvé ou réfuté. En cette occurrence, je ne puis voir de motif valable pour le prendre comme axiome.

grands généraux et à eux seuls [8]. Si nous appelons ce prédicat $\psi ! \hat{z}$, l'affirmation que nous venons de porter sur Napoléon est équivalente à ψ !(Napoléon) ; et une équivalence du même genre vaut encore, si, au lieu de Napoléon, nous prenons n'importe quel autre individu. Nous avons donc trouvé ainsi un prédicat, qui équivaut, dans tous les cas, à la propriété attribuée plus haut à Napoléon, c'est-à-dire qui appartient aux objets qui possèdent cette propriété et à eux seuls. L'axiome de réductibilité exprime qu'un tel prédicat existe toujours, c'est-à-dire que si une propriété quelconque d'un objet convient à une collection d'objets, il y a un prédicat déterminé qui convient à la même collection.

Nous pouvons présenter immédiatement un éclaircissement de notre principe, en l'appliquant à la notion *d'identité*. En cette occurrence, il a une certaine affinité avec l'identité des indiscernables de Leibniz. Il est évident que que, si x et y sont identiques, et si φx est vrai, φy est vrai aussi. Peu importe ici le genre de fonctions $\varphi \hat{x}$ en question : l'affirmation doit valoir pour n'importe quelle fonction. Mais nous ne pouvons pas dire inversement : « Si, pour toutes valeurs de φ, φx implique φy, alors x et y sont identiques », parce que nous ne pouvons admettre la notion « toutes valeurs de φ ». Si nous voulons parler de « toutes valeurs de φ », nous devons alors nous restreindre aux fonctions d'un seul ordre. Nous pouvons nous astreindre à entendre sous φ les prédicats, ou les fonctions du second ordre, ou les fonctions de quelque ordre, arbitrairement choisi. Mais nous devons nécessairement ne considérer que les fonctions d'un seul ordre. Nous obtiendrons dès lors une hiérarchie, pour ainsi parler, des différents degrés d'identité. Nous pouvons dire « tous les prédicats de x appartiennent à y », « toutes les propriétés du second ordre d'x appartiennent à y » et ainsi de suite. Chacune de ces affirmations implique celles qui la précèdent; par exemple, si toutes les propriétés du second ordre d'x appartiennent à y, alors tous les prédicats d'x appartiennent à y, car le fait d'avoir tous les prédicats d'x est une propriété du second ordre et cette propriété appartient à x. Mais nous ne pouvons pas, sans l'aide d'un axiome, conclure inversement que, si, tous les prédicats d'x appartiennent à y, toutes propriétés du second ordre d'x doivent aussi appartenir à y. Ainsi, nous ne pouvons pas, sans l'aide d'un axiome, être sûrs qu'x et y sont identiques s'ils ont les mêmes prédicats. L'identité des indiscernables de Leibniz fait fonction de cet axiome. On notera à cet égard que par « indiscernables » il ne peut pas avoir entendu deux objets qui concordent par *toutes* leurs propriétés, puisque c'est une propriété déterminée d'x que d'être identique à x, et par conséquent, cette propriété devrait nécessairement appartenir à y, si x et y concordaient par *toutes* leurs propriétés. La nécessité d'entendre dans un sens restreint les propriétés communes qui rendent les choses indiscernables est donc impliquée dans la nécessité d'un axiome. Pour être plus clair (et non plus pour interpréter

8. Quand un groupe (fini) de prédicats est donné par une énumération effective, leur disjonction est un prédicat, parce qu'aucun prédicat ne se rencontre dans la disjonction comme variable apparente.

Leibniz) nous pouvons supposer que les propriétés communes, requises pour rendre les choses indiscernables, doivent être limitées à l'ordre des prédicats. Dès lors l'identité des indiscernables exprime que si x et y concordent par tous leurs prédicats, ils sont identiques. Cela peut être prouvé, si nous supposons l'axiome de réductibilité. En effet, dans ce cas, la même collection d'objets à qui convient une propriété, est aussi définie au moyen d'un certain prédicat. Dès lors, il y a un certain prédicat commun aux objets qui ont la propriété d'être identiques à x, et à eux seuls. Ce prédicat appartient à x, puisque x est identique à lui-même; il appartient donc à y, puisque y a tous les prédicats de x; donc y est identique à x. Il suit de là que nous pouvons *définir* x et y comme identiques quand tous les prédicats de x appartiennent à y, c'est-à-dire, quand $(\varphi) : \varphi ! x$ implique $\varphi ! y$. Mais, sans l'axiome de réductibilité, ou quelque axiome équivalent en cette occurrence, nous serions forcés de regarder l'identité comme indéfinissable, et d'admettre (ce qui semble impossible) que deux objets peuvent concorder par tous leurs prédicats sans être identiques.

L'axiome de réductibilité joue un rôle encore plus essentiel dans la théorie des classes. Nous observerons, en premier lieu, que si nous supposons l'existence des classes, on peut donner une preuve de l'axiome de réductibilité. Car, en ce cas, étant donné une fonction quelconque $\varphi \hat{z}$ de n'importe quel ordre, il existe une classe α qui est composée des seuls objets qui vérifient $\varphi \hat{z}$. Par là, « φx » est équivalent à « x appartient à α ». Mais « x appartient à α » est une expression qui ne contient aucune variable apparente; elle est par conséquent une fonction prédicative de x. Dès lors, si nous supposons l'existence des classes, l'axiome de réductibilité n'est plus nécessaire. Supposer l'axiome de réductibilité est par conséquent une hypothèse de plus faible portée que supposer qu'il y a des classes. Cette dernière supposition a été faite jusqu'ici sans hésitation. Pour ma part, je considère pourtant que, d'abord, les contradictions de la logique réclament une explication plus compliquée, si l'on suppose qu'il y a des classes, et qu'en second lieu, il est toujours bon de s'en tenir à l'hypothèse la plus faible requise pour la démonstration de nos théorèmes; pour ces motifs, je préfère supposer l'axiome de réductibilité plutôt que l'existence des classes. Mais afin d'expliquer l'emploi de cet axiome pour rendre compte des classes, il est nécessaire d'abord d'expliquer la théorie des classes.

6. La théorie des classes

Pour expliquer la théorie des classes, il est nécessaire d'abord d'expliquer la distinction entre les fonctions *extensives* et les fonctions *intensives*. A cet effet, on pose les définitions suivantes :

La *valeur de vérité* d'une proposition est la vérité, si elle est vraie, et la fausseté, si elle est fausse. (Cette expression est due à Frege.)

Deux propositions sont dites *équivalentes*, quand elles ont la même valeur de vérité, c'est-à-dire, quand elles sont toutes deux vraies ou toutes deux fausses.

Deux fonctions propositionnelles sont dites *formellement équivalentes* quand elles sont équivalentes pour tout argument possible, c'est-à-dire quand un argument quelconque qui satisfait l'une satisfait l'autre et vice versa. Ainsi « $\hat{x}$ est un homme » est formellement équivalent à « $\hat{x}$ est un bipède sans plumes »; « $\hat{x}$ est un nombre premier pair » est formellement équivalent à « $\hat{x}$ est identique à 2 ».

Une fonction d'une fonction est dite extensive quand sa valeur de vérité pour un argument quelconque est la même que pour un argument formellement équivalent. Autrement dit, $f(\varphi\hat{z})$ est une fonction extensive de $\hat{\varphi}z$ si $f(\varphi\hat{z})$ est équivalent à $f(\psi\hat{z})$, pourvu que $\psi\,\hat{z}$ soit formellement équivalent à $\varphi\hat{z}$. Mais puisque, dans cette définition, $\varphi\hat{z}$ et $\psi\hat{z}$ sont des variables apparentes, il est nécessaire de les limiter à un type unique; nous nous astreindrons à les prendre comme fonctions *prédicatives*. Ainsi $f(\varphi\,!\hat{x})$ est une fonction extensive si, pour tout φ et tout ψ, $f(\varphi\,!z)$ est équivalent à $f(\psi\,!z)$ pourvu que $\varphi\,!\hat{z}$ soit formellement équivalent à $\varphi\,!\hat{z}$.

Une fonction de fonction est dite intensive quand elle n'est pas extensive.

La nature et l'importance de la distinction entre fonctions extensives et intensives seront éclaircies par quelques exemples. La proposition « 'x est un homme' implique toujours 'x est un mortel' » est une fonction extensive de la fonction '$\hat{x}$ est un homme', parce que nous pouvons remplacer' x est un homme' par '$\hat{x}$ est un bipède sans plumes' ou quelque autre expression qui s'applique aux mêmes objets que 'x est un homme' et à ceux-là seuls. Mais la proposition « A croit que 'x est un homme' implique toujours 'x est un mortel' » est une fonction intensive de '$\hat{x}$ est un homme' parce que A peut n'avoir jamais considéré la question de savoir si les bipèdes sans plumes sont mortels, ou peut croire à tort qu'il y a des bipèdes sans plumes qui ne sont pas mortels. Ainsi, même si 'x est un homme' est formellement équivalent à 'x est un bipède sans plumes' il ne suit aucunement qu'une personne qui croit que tous les hommes sont mortels soit obligée de croire que tous les bipèdes sans plumes sont mortels; car elle peut n'avoir jamais pensé à des bipèdes sans plumes ou avoir supposé que les bipèdes sans plumes n'étaient pas toujours des hommes. D'autre part, la proposition « le nombre des arguments qui satisfont la fonction $\varphi\,!\hat{z}$ est n » est une fonction extensive de $\varphi\,!\hat{z}$, car sa vérité ou sa fausseté ne change pas si nous remplaçons $\varphi\,!\hat{z}$ par une fonction quelconque, vraie si $\varphi\,!z$ est vrai et fausse si $\varphi\,!\hat{z}$ est faux. Mais la proposition « A affirme que le nombre des arguments qui satisfont $\varphi\,!\hat{z}$ est n » est une fonction intensive de $\varphi\,!\hat{z}$; car, si A affirme cette propriété de $\varphi\,!\hat{z}$, il ne peut certainement l'affirmer de toutes les fonctions prédicatives, qui sont équivalentes à $\varphi\,!\hat{z}$, parce que la vie est trop courte. Considérons encore la proposition « deux hommes de race blanche ont atteint le Pôle Nord ». Cette proposition exprime « deux arguments satisfont la fonction '$\hat{x}$ est un homme de race blanche qui a atteint le Pôle Nord' ». La vérité ou la fausseté de cette proposition ne change pas si nous remplaçons « x est un homme blanc qui a atteint le Pôle Nord » par quelque autre expression, qui vaut du ou des mêmes arguments et de ceux-là seuls. Elle est donc une fonction extensive. Mais la proposition « c'est une étrange coïncidence que deux hommes de race blanche aient atteint le Pôle Nord, » exprime « c'est une étrange coïncidence que deux arguments satisfassent la fonction ' $\hat{x}$ est un homme de race blanche qui a atteint le Pôle Nord ' », et n'est donc pas équivalente à « c'est une étrange coïncidence que deux arguments satisfassent la fonction ' $\hat{x}$ est Dr Cook ou commandant Peary ' ». Ainsi l'expression « c'est une étrange coïncidence que $\varphi ! \hat{x}$ soit satisfait par deux arguments » est une fonction intensive.

Les exemples précédents montrent clairement ce fait que les fonctions de fonctions, qui sont l'objet spécial des mathématiques sont extensives, et que les fonctions de fonctions intensives n'apparaissent que là où des idées étrangères à la mathématique sont introduites, comme ce que quelqu'un affirme ou croit, ou les émotions soulevées par quelque fait. Dès lors, il est naturel, dans une logique mathématique, d'attacher une importance spéciale aux fonctions de fonctions *extensives*.

Quand deux fonctions sont formellement équivalentes, nous pouvons dire qu'elles *ont la même extension*. Cette définition est en accord étroit avec l'usage commun. Nous ne supposons pas qu'il existe une chose telle qu'une extension; nous définissons simplement le tout de la phrase « avoir la même extension ». Nous pouvons maintenant dire qu'une fonction extensive d'une fonction est celle dont la vérité ou la fausseté dépend seulement de l'extension de son argument. Dans ce cas, il convient de regarder l'affirmation en question comme concernant l'extension. Puisque les fonctions extensives sont nombreuses et importantes, il est naturel de regarder l'extension comme un objet, — appelons-le *classe*, — que l'on suppose être le sujet de toutes les affirmations équivalentes concernant diverses fonctions formellement équivalentes. Ainsi, par exemple, si nous disons « il y a eu douze Apôtres », il est naturel de regarder cette affirmation comme attribuant la propriété d'être douze à une certaine collection d'hommes, expressément ceux qui ont été les Apôtres, plutôt qu'attribuant la propriété d'être satisfaite par douze arguments à la fonction « $\hat{x}$ était un Apôtre ». Cette opinion est fortifiée par le sentiment qu'il y a quelque chose d'identique dans le cas de deux fonctions qui « ont la même extension ». Si nous prenons des problèmes simples tels que « combien de combinaisons peuvent être faites avec n objets ? » il semble à première vue nécessaire que chaque « combinaison » soit un objet simple, qui peut être compté comme unité. Cette conception, pourtant, n'est certainement pas techniquement nécessaire, et je ne vois pas de raison de supposer qu'elle est vraie philosophiquement. Le procédé technique par lequel cette difficulté apparente est surmontée est le suivant.

Nous avons vu qu'une fonction extensive d'une fonction peut être regardée comme une fonction de la classe déterminée par la fonction argument, mais qu'une fonction intensive ne peut pas être regardée en même façon. Pour aller au-devant de la nécessité de traiter différemment les fonctions extensives et intensives de fonctions, nous construisons une fonction extensive dérivée de n'importe quelle fonction d'une fonction prédicative, et douée de la propriété d'être équivalente à la fonction dont elle est dérivée, pourvu que celle-ci soit extensive. Cette fonction dérivée se définit ainsi : Soit une fonction $f(\psi ! \hat{z})$, notre fonction dérivée sera : « Il existe une fonction prédicative qui est formellement équivalente à $\varphi \hat{z}$ et satisfait f ». Si $\varphi \hat{z}$ est une fonction prédicative, notre fonction dérivée sera vraie, toutes les fois que $f(\varphi \hat{z})$ sera vrai. Si $f(\varphi \hat{z})$ est une fonction extensive et $\varphi \hat{z}$ une fonction prédicative, notre fonction dérivée ne sera pas vraie à moins que $f(\varphi \hat{z})$ ne soit vrai; dans ce cas, notre fonction dérivée est donc équivalente à $f(\varphi \hat{z})$. Si $f(\varphi \hat{z})$ n'est pas une fonction extensive, et si $\varphi \hat{z}$ est une fonction prédicative, notre fonction dérivée peut parfois être vraie quand la fonction originelle est fausse. Mais dans tous les cas, la fonction dérivée est toujours extensive. La raison pour laquelle nous nous sommes astreints à ne considérer qu'une fonction *prédicative* formellement équivalente à $\varphi \hat{z}$ est que la fonction formellement équivalente à $\varphi \hat{z}$ doit être une variable apparente et par conséquent est nécessairement de quelque type déterminé; il est donc naturel de prendre le type des fonctions prédicatives, car il est le plus simple. On trouvera que, dans tous les cas de fonctions extensives qui se rencontrent en pratique, deux fonctions formellement équivalentes, quand elles sont prises comme arguments (par l'aide de l'ambiguïté systématique), donnent lieu à la même valeur de vérité, même quand l'une ou l'autre ou les deux ensembles ne sont pas prédicatives; toutefois ceci ne peut être exprimé dans la définition des fonctions extensives, parce que cela impliquerait la notion d'une fonction qui serait variable apparente et ne serait pas limitée à un type déterminé. Toutes les fois que deux fonctions formellement équivalentes donnent lieu à la même valeur de vérité pour $f(\varphi \hat{z})$, même quand elles ne sont pas toutes deux prédicatives, alors la fonction « il y a une fonction prédicative formellement équivalente à $\varphi \hat{z}$ et satisfaisant f » est équivalente à $f(\varphi \hat{z})$ pourvu qu'il y ait une fonction prédicative formellement équivalente à $\varphi \hat{z}$. Mais s'il n'existe aucune fonction de ce genre, la fonction dérivée est nécessairement fausse même si la fonction originelle était vraie et f est une fonction extensive. A ce moment, nous pourrons faire emploi de l'axiome de réductibilité, d'après lequel il y a toujours une fonction prédicative $\psi ! \hat{z}$ formellement équivalente à $\varphi \hat{z}$.

Pour que la fonction dérivée ait un sens pour une fonction $\varphi \hat{z}$, d'ordre quelconque mais dont les arguments soient d'un type légitime, il est nécessaire et suffisant que l'expression $f(\psi ! \hat{z})$, où $\psi ! \hat{z}$ est une fonction prédicative quelconque, ait un sens. La raison de cette règle est que la seule condition requise pour un argument $\varphi \hat{z}$ consiste à supposer qu'il est formellement équivalent à quelque fonction prédicative $\psi ! \hat{z}$; or l'équivalence formelle a, au point de vue du type, une ambiguïté systématique du même genre que l'ambiguïté des notions de vérité et d'erreur; elle peut par conséquent être affirmée à propos de deux fonctions dont chacune a un ordre différent, mais à condition que ces fonctions aient des arguments du même type. Ainsi, grâce à notre fonction dérivée, nous n'avons pas simplement remplacé partout les fonctions intensives, mais nous avons, *en pratique*, écarté la nécessité où nous étions d'envisager des différences de types parmi les fonctions dont les arguments étaient du même type. Cela introduit dans notre hiérarchie le même genre de simplification que si nous nous astreignions à ne jamais considérer que des fonctions prédicatives.

Comme nous l'avons expliqué précédemment, il convient de regarder une fonction extensive d'une fonction comme si elle avait pour argument, non la fonction même, mais la classe déterminée par cette fonction. Or nous avons vu que notre fonction dérivée est toujours extensive. Donc, si notre fonction originelle est $f(\psi\,!\,\hat{z})$, nous écrirons la fonction dérivée $f\{\hat{z}(\varphi\, z)\}$, où « $\hat{z}(\varphi\, z)$ » peut être lue « la classe des arguments qui satisfont φz » ou plus simplement « classe déterminée par $\varphi\hat{z}$ ». Ainsi, « $f\{\hat{z}(\varphi\, \hat{z})\}$ » signifiera : Il y a une fonction prédicative $\psi\,!\hat{z}$ qui est formellement équivalente à $\varphi\, \hat{z}$ et qui est telle que $f\,(\psi\,!\,\hat{z})$ est vrai ». Cette expression est en réalité une fonction de $\varphi\hat{z}$, mais nous la traitons symboliquement comme si elle avait un argument $\hat{z}(\varphi z)$. Grâce à l'axiome de réductibilité, nous obtenons comme résultat les propriétés usuelles des classes. Par exemple deux fonctions formellement équivalentes déterminent la même classe, et inversement, deux fonctions qui déterminent la même classe sont formellement équivalentes. D'autre part, dire que x est un membre de $\hat{z}(\varphi z)$, c'est-à-dire, de la classe déterminée par $\varphi\hat{z}$, est vrai, quand $\varphi\, x$ est vrai, faux quand φx est faux. Ainsi, tous les services que la mathématique semble attendre de la notion de classe lui sont pleinement rendus par les objets de création purement symbolique $\hat{z}(\varphi\, z)$, à condition de supposer l'axiome de réductibilité.

En vertu de l'axiome de réductibilité, si $\varphi\, \hat{z}$ est une fonction quelconque, il existe une fonction prédicative $\psi\,!\,\hat{z}$ formellement équivalente. Dès lors, la classe $\hat{z}(\,\varphi\, z)$ est identique à la classe $\hat{z}(\psi\,!\,z)$. S'il en est ainsi, toute classe peut être définie par une fonction prédicative. Par conséquent, l'ensemble total des *classes* dont on peut dire sans non-sens qu'un terme donné leur appartient ou non, est un ensemble total dont la notion est légitime; et cela, en dépit de ce fait que l'ensemble total des *fonctions* dont on peut dire sans non-sens qu'un terme donné les satisfait ou non, n'est pas un ensemble légitime. Les classes, à qui un terme donné a appartient ou non sont les classes définies par les a-fonctions; ce sont aussi les classes définies par les a-fonctions *prédicatives*. Appelons-les « a-classes ». Les « a-classes » forment donc un ensemble total légitime, dérivé de celui des a-fonctions prédicatives. Dès lors un grand nombre d'expressions générales deviennent possibles qui, sans cela, impliqueraient les paradoxes du cercle vicieux. Aucune de ces propositions générales n'est telle qu'elle conduise à des contradictions, et pour beaucoup d'entre elles, il est difficile de les supposer illégitimes. Le fait qu'elles sont rendues possibles par l'axiome de réductibilité et qu'elles seraient, sans cela, exclues au nom du principe du cercle vicieux, doit être regardé comme un argument en faveur de l'axiome de réductibilité.

Il est intéressant de noter que tous les services rendus par l'axiome de réductibilité le sont également bien si nous supposons qu'il existe toujours une fonction du n^e ordre (où n est déterminé) formellement équivalente à $\varphi\,\hat{x}$, quel que soit l'ordre de $\varphi\,\hat{x}$. Nous entendrons ici par « une fonction du n^e ordre » une fonction du n^e ordre relativement aux arguments de $\varphi\,\hat{x}$; ainsi si ces arguments sont, absolument parlant, du m^e ordre, nous supposons l'existence d'une fonction formellement équivalente à $\varphi\hat{x}$ et dont l'ordre absolu est $m + n$. L'axiome de réductibilité, dans la forme présentée tout à l'heure, fait $n = 1$, mais ce n'est pas une condition nécessaire de l'emploi de cet axiome. Il n'est pas nécessaire aussi que n conserve la même valeur pour différentes valeurs de m; ce qui est nécessaire, c'est seulement que n soit constant, tant que m est constant. Ce dont nous avons besoin, c'est en effet d'être capables, là où il s'agit de fonctions extensives de fonctions, de traiter une *a*-fonction quelconque au moyen d'une certaine fonction d'un type donné formellement équivalente, comme aussi d'obtenir des résultats qui impliqueraient sans cela la notion illégitime de « toutes les *a*-fonctions ». Mais peu importe quel est le type donné. Il ne semble pas, pourtant, qu'on augmente de façon appréciable le degré de vraissemblance de l'axiome de réductibilité, en le prenant sous la forme précédente, plus générale mais plus compliquée.

L'axiome de réductibilité est équivalent à l'hypothèse que « toute combinaison ou disjonction de prédicats [9], est équivalente à un simple prédicat ». En d'autres termes, nous supposons que, si nous affirmons que x a tous les prédicats qui satisfont une fonction $f(\varphi\,!\,\hat{z})$, il existe un prédicat unique que x possède quand notre affirmation est vraie et qui lui manque quand elle est fausse; et il en est de même, si nous affirmons que x a quelqu'un des prédicats qui satisfont $f(\varphi\,!\,\hat{z})$. Au moyen de cette hypothèse, en effet, l'ordre d'une fonction non prédicative peut être abaissé d'une unité; par conséquent, après avoir parcouru un nombre fini de degrés, nous pourrons passer d'une fonction non-prédicative à une fonction prédicative formellement équivalente. Il n'apparaît pas d'abord comme probable que l'hypothèse que nous venons de définir puisse remplacer l'axiome de réductibilité dans les déductions symboliques; son emploi en effet exigerait l'introduction explicite de ce postulat supplémentaire, que, en abaissant le degré d'une fonction d'un nombre fini, nous pouvons passer d'une fonction quelconque à une fonction prédicative; ce postulat ne pourrait être bien exposé sans des développements presque impossibles au début de la logique. Mais les raisons précédentes semblent démontrer évidemment qu'en fait,

9. Ici la combinaison ou disjonction est supposée être donnée qualitativement (*intensionally*). Si elle est donnée en extension (c'est-à-dire par énumération), aucune assomption n'est requise; mais, en ce cas, le nombre des prédicats visés doit être fini.

si l'axiome à forme alternative que nous venons de définir est vrai, il en est de même de l'axiome de réductibilité. Et comme la réciproque est naturellement évidente, la démonstration de l'équivalence est complètement donnée.

7. Raisons pour accepter l'axiome de réductibilité

Que l'axiome de réductibilité est évident de soi-même, c'est là une proposition qui pourrait difficilement être maintenue. Mais en fait, l'évidence naturelle n'est rien de plus qu'une partie des raisons pour lesquelles on accepte un axiome et elle n'est jamais indispensable. Les raisons d'accepter un axiome, comme toute autre proposition, sont toujours, en grande partie, inductives : c'est par exemple, le fait qu'on en peut déduire nombre de propositions, qui sont de leur côté à peu près hors de doute; et, qu'on ne connaît aucune manière aussi plausible d'expliquer la vérité de ces propositions, si l'axiome était faux; et, enfin, qu'on n'en peut déduire aucune proposition qui soit probablement fausse. Si l'axiome est, en apparence, évident de soi, cela signifie seulement, en pratique, qu'il est à peu près hors de doute; car bien des choses ont été jugées évidentes qui se sont pourtant transformées en erreurs. Et si l'axiome lui-même est à peu près hors de doute, cela vient seulement en adjonction de l'évidence obtenue par induction, et qui vient de ce fait que les conséquences de l'axiome sont à peu près hors de doute; cela n'introduit pas une évidence nouvelle, d'une espèce radicalement différente. L'infaillibilité ne peut jamais être acquise et, par conséquent, quelque élément de doute s'attache toujours à tout axiome et à toutes ses conséquences. Dans la logique formelle, l'élément de doute est moins important que dans les sciences, mais il n'est pas absent, ainsi qu'il est apparu de ce fait que les paradoxes logiques ont dérivé de prémisses dont on ignorait auparavant qu'elles exigaient pour elles-mêmes quelque limitation de sens. Dans le cas de l'axiome de réductibilité, l'évidence d'induction qui milite en sa faveur est très forte, car les raisonnements qu'il permet et les résultats auxquels il conduit apparaissent tous comme légitimes. Mais bien qu'il semble très improbable que cet axiome doive se transformer plus tard en erreur, il ne l'est aucunement qu'on arrive à le déduire d'un autre axiome plus fondamental encore et plus évident. Il se peut que l'usage du principe du cercle vicieux, tel qu'il a été présenté dans la précédente hiérarchie des types, soit plus strict qu'il n'est en réalité nécessaire, et que si l'on restreint son emploi, la nécessité de notre axiome puisse ne plus s'imposer. De telles modifications, pourtant, ne rendraient pas faux ce qui a été affirmé sur le fondement des principes précédemment expliqués : elles permettraient, simplement, une preuve plus facile des mêmes théorèmes. Nous n'avons donc, semble-t-il, que les plus faibles raisons de craindre que l'emploi de l'axiome de réductibilité puisse nous conduire à l'erreur.

Un point de l'article de M. Poincaré sur « La logique de l'infini » appelle un mot d'explication. Il affirme (p. 469) : « La théorie des types reste incompréhensible, si on ne suppose la théorie des ordinaux déjà constituée. » Cette assertion me paraît reposer sur une confusion. Les types *ont* un ordre; nous l'admettons, mais nous n'admettons pas qu'il est nécessaire d'étudier cet ordre en tant qu'ordre. Les moments d'un raisonnement déductif ont aussi un ordre, mais il n'est pas nécessaire pour la déduction d'étudier l'ordre de ces moments, bien que, quand nous tournons notre attention vers l'ordre, nous sentions qu'il est essentiel à la déduction. Il en est de même des types : ils ont un ordre, et quand nous l'étudions, nous voyons qu'il est important. Mais nous pouvons les employer à tous les usages où ils sont requis, sans étudier leur ordre, absolument comme nous pouvons distinguer une fonction φx d'une fonction $\varphi(x, y)$, sans reconnaître que la première a un seul argument, tandis que la seconde en a deux. Il serait pourtant d'un vain pédantisme d'éviter toutes les phrases où se trouve impliquée cette reconnaissance, encore que nous puissions, comme nous l'avons vu, éviter de telles phrases si nous le désirions. De même, en ce qui concerne les types, nous pouvons parler de leur ordre en mots qui, à strictement parler, impliquent la connaissance des ordinaux, parce qu'il va de soi que nous pourrions faire tout l'emploi nécessaire des types, sans nous servir de tels mots. Au lieu de parler de fonctions du premier ordre, nous parlerions de « fonctions $\varphi ! \hat{x}$ »; au lieu de fonctions du second ordre, nous dirions « fonctions $f ! (\hat{\varphi} ! \hat{x})$ » et ainsi de suite. Ainsi, bien que les types aient un ordre, les ordinaux ne sont pas présupposés dans la théorie des types, et il n'y a aucun cercle logique à fonder la théorie des ordinaux sur un système qui suppose la théorie des types.

Kurt Gödel

La logique mathématique de Russell

La logique mathématique *, qui n'est rien d'autre qu'une formulation à la fois rigoureuse et exhaustive de la logique formelle, a deux aspects tout à fait différents **. D'un côté, c'est une partie des mathématiques qui traite de classes, de relations, de combinaisons de symboles, etc., au lieu de traiter de nombres, de fonctions, de figures géométriques, etc. De l'autre, c'est une science qui précède toutes les autres, et renferme les idées et les principes qui les sous-tendent toutes. C'est dans cette seconde acception que la logique mathématique fut conçue pour la première fois par Leibniz, dans sa *Characteristica universalis*, dont elle devait constituer une partie essentielle. Mais il fallut attendre près de deux siècles après sa mort pour que l'idée qu'il avait d'un calcul logique assez puissant pour convenir à la manière de raisonner qui se rencontre dans les sciences exactes, fût par Frege et Peano [1], mise en pratique (en un certain sens au moins, si ce n'est pas celui que Leibniz avait en tête). Frege porta principalement son intérêt sur l'analyse de la pensée, et il employa surtout son calcul à dériver l'arithmétique à partir de la logique pure. Peano, en revanche, porta davantage intérêt aux applications du calcul à l'intérieur des mathématiques, créant un symbolisme élégant et souple, qui permet d'exprimer jusqu'aux théorèmes mathématiques les plus difficiles avec une parfaite

* « Russell's Mathematical Logic », in *The Philosophy of Bertrand Russell* edited by P. A. Schilpp, The Library of Living Philosophers, Tudor Publishing Company, New York, 1944, 125-153. Texte traduit par J. A. Miller et J. C. Milner avec l'autorisation des éditeurs et de M. K. Gödel, extrait d'un recueil à paraître.

** L'auteur désire signaler que (1) depuis la première publication de cet article, des progrès ont été faits dans la solution de certains problèmes débattus, et que les formulations présentées pourraient être améliorées en plusieurs endroits, et que (2) le terme de « constructiviste » est employé dans ce texte pour désigner un constructivisme d'un genre strictement antiréaliste. Son sens, par conséquent, n'est pas identique à celui qui a cours dans les débats actuels sur les fondements des mathématiques. Si on le réfère au développement présent de la logique et des mathématiques, il est équivalent à un certain genre de « prédicativité », et par là il diffère à la fois de « admissible par l'intuitionnisme », et de « constructif » au sens de l'école de Hilbert. [Note ajoutée en 1964, pour la réédition du texte dans le recueil de Paul Benacerraf et Hilary Putnam, *Philosophy of Mathematics*, Prentice-Hall, Philosophy Series (New Jersey, Prentice-Hall) p. 211.]

1. Frege a sans aucun doute la priorité, étant donné que sa première publication sur le sujet, qui contient déjà tout l'essentiel, précède de dix ans celle de Peano.

rigueur et, souvent, une grande concision par des formules uniques.

C'est dans la ligne de la pensée de Frege et de Peano que le travail de Russell s'entama. En raison de sa laborieuse analyse des démonstrations, Frege n'avait pas dépassé les propriétés les plus élémentaires de la série des entiers, tandis que Peano avait réussi à réunir un grand nombre de théorèmes mathématiques exprimés dans le nouveau symbolisme, mais sans leurs démonstrations. C'est seulement dans les *Principia Mathematica* qu'une utilisation pleine et entière fut faite du nouveau symbolisme pour dériver effectivement d'un très petit nombre de concepts et d'axiomes logiques, des parties étendues des mathématiques. De surcroît, la jeune science se trouva ainsi dotée d'un nouvel instrument, la théorie abstraite des relations. Peirce et Schröder avaient déjà auparavant développé le calcul des relations, mais en lui imposant certaines restrictions, et en serrant de trop près, de manière analogique, l'algèbre des nombres. Dans les *Principia* au contraire, non seulement la théorie des ensembles de Cantor, mais aussi l'arithmétique ordinaire et la théorie de la mesure étaient traitées du point de vue abstrait des relations.

On doit regretter que cette première exposition complète et détaillée d'une logique mathématique et de la dérivation des mathématiques à partir d'elle, manque à ce point de rigueur formelle quant à ses fondements (présentés dans les *Principia* de ★1 à ★21) qu'elle constitue à cet égard un pas en arrière d'importance par rapport à Frege. Ce qui fait défaut par-dessus tout, c'est un énoncé rigoureux de la syntaxe du formalisme. La syntaxe n'est pas prise en considération là même où ce serait nécessaire pour donner valeur aux démonstrations, en particulier lorsqu'il s'agit des «symboles incomplets». Ceux-ci ne sont pas introduits par des définitions explicites, mais par des règles qui indiquent comment traduire les énoncés qui les contiennent en énoncés qui ne les contiennent plus. Afin d'être sûr, néanmoins, qu'une telle traduction est possible et déterminée univoquement (ou pour quelles expressions elle l'est), et que les règles d'inférence s'appliquent bien au nouveau type d'expressions également (ou jusqu'à quel point elles s'y appliquent), il est nécessaire d'avoir un aperçu général de toutes les expressions possibles, ce que seule l'étude de la syntaxe peut donner. L'incertitude est particulièrement aiguë touchant la règle permettant d'opérer les substitutions, et de remplacer des symboles définis par leur *definiens*. Si cette dernière est appliquée aux expressions qui contiennent d'autres symboles définis, elle demande que l'ordre dans lequel ceux-ci sont éliminés soit indifférent. Ce n'est pourtant pas toujours le cas, loin de là (on peut prendre $\varphi ! \hat{u} = \hat{u}[\varphi ! \hat{u}]$ comme contre-exemple). Dans les *Principia*, de telles éliminations sont toujours effectuées par des substitutions dans les théorèmes correspondant aux définitions, si bien que c'est au premier chef la règle de substitution qui aurait à être démontrée.

Néanmoins je n'entends pas entrer dans plus de détails pour ce qui touche aussi bien au formalisme qu'au contenu mathématique des

Principia [2], et je consacrerai la partie ultérieure de cet article au travail de Russell sur l'analyse des concepts et des axiomes qui soutiennent la logique mathématique. Dans ce champ, Russell a produit un grand nombre d'idées intéressantes dont on trouve certaines exposées avec le plus de clarté dans ses écrits antérieurs (ou même qu'on ne trouve que là). C'est pourquoi souvent je me référerai aussi à ces écrits antérieurs, bien que leur contenu puisse différer en partie de la position présente de Russell.

Ce qui surprend d'abord dans ce champ, c'est le réalisme prononcé de l'attitude qu'y prend Russell, dont témoignent de nombreux passages de ses écrits. « La logique a affaire au monde réel, exactement comme la zoologie, bien que ce soit aux caractéristiques les plus abstraites et les plus générales de celui-ci », dit-il par exemple, dans son *Introduction to Mathematical Philosophy* (édition de 1920, p. 169). Il est vrai néanmoins que ce réalisme est allé s'atténuant au cours des années [3], et qu'il a toujours été aussi plus marqué en théorie qu'en pratique. Quand il s'attaquait à un problème concret, les objets à analyser (par exemple, les classes ou les propositions) se transformaient le plus souvent en « fictions logiques ». Encore que, peut-être, cela ne signifie pas nécessairement [au sens où Russell emploie cette locution] que ces choses n'existent pas, mais seulement que nous n'en avons pas de perception directe.

Russell développe l'analogie entre les mathématiques et une science naturelle à un autre point de vue encore (dans un de ses écrits antérieurs). Il compare les axiomes de la logique et des mathématiques aux lois de la nature, et l'évidence logique à la perception sensible; par suite, il n'est plus nécessaire que les axiomes soient évidents en eux-mêmes : leur justification repose plutôt (tout comme en physique) sur le fait qu'ils permettent à ces « perceptions sensibles » d'être déduites; ce qui, bien entendu, n'exclut pas qu'ils aient aussi une sorte de vraisemblance intrinsèque, semblable à celle qui existe en physique. Je pense que cette conception (à condition de donner un sens suffisamment strict à « évidence ») a été justifiée dans une large mesure par les développements ultérieurs de la science, et qu'on peut s'attendre à ce que cela aille s'accentuant dans l'avenir. Il est apparu que (en assumant que la mathématique moderne est consistante) la solution de certains problèmes arithmétiques demande qu'on fasse usage d'assomptions qui fondamentalement transcendent l'arithmétique, c'est-à-dire le domaine de cette sorte d'évidence élémentaire et incontestable qui se laisse parfaitement comparer à la perception sensible. De plus, il semble vraisemblable que, pour trancher certaines questions de la théorie abstraite des ensembles et même certaines questions connexes de la théorie des nombres réels, de nouveaux axiomes fondés sur quelque idée jusqu'alors inconnue seront nécessaires. Il est possible également que les difficultés, apparemment insurmontables, que quelques au-

2. Cf. sur ce point l'article de W. V. Quine dans le volume Whitehead de cette série (*The Library of Living Philosophers*).

3. Le passage cité ci-dessus a été coupé dans les éditions suivantes de l'*Introduction*.

tres problèmes mathématiques ont présentées pendant de nombreuses années, sont dues au fait que les axiomes nécessaires n'ont pas encore été trouvés. Bien sûr, puisqu'il en est ainsi, il peut se faire que la mathématique perde une bonne part de sa « certitude absolue », mais sous l'influence de la critique moderne des fondements, cela s'est déjà en grande partie accompli. Il y a quelque ressemblance entre la conception de Russell et celle de Hilbert, lequel voulait « compléter les données de l'intuition mathématique » par des axiomes, par exemple la loi du tiers exclu, qui, à son opinion, ne sont pas donnés par l'intuition; néanmoins la frontière entre données et assomptions ne paraît pas passer au même endroit selon qu'on suit Hilbert ou Russell.

Un exemple intéressant de l'analyse russellienne des concepts logiques fondamentaux est fourni par la manière dont il traite l'article défini « le ». Le problème est le suivant : qu'est-ce que dénotent ou signifient [4] les locutions dites descriptives (c'est-à-dire, par exemple, « l'auteur de *Waverley* » ou « le roi d'Angleterre »), et quel est le sens des énoncés dans lesquelles elles figurent?

La réponse apparemment évidente, que « l'auteur de *Waverley* » signifie Walter Scott, conduit à des difficultés inattendues. En effet, si nous admettons un autre axiome apparemment évident, que la signification d'une expression composée, dont les constituants ont eux-mêmes une signification, ne dépend que de la signification de ces constituants (et non de la manière dont cette signification est exprimée), il s'ensuit alors que l'énoncé « Scott est l'auteur de *Waverley* » signifie la même chose que « Scott est Scott »; ce qui, à son tour, conduit à peu près inévitablement à la conclusion que tous les énoncés vrais ont la même signification (aussi bien que les faux) [5]. Frege avait effectivement tiré cette conclusion; et il l'entendait dans un sens presque métaphysique, qui rappelle quelque peu la doctrine éléatique de l'« Un ». « Le Vrai » — selon Frege — est analysé par nous de différentes façons, en différentes propositions; « Le Vrai » est le nom dont il se sert pour désigner la signification commune de toutes les propositions vraies [6].

Or, selon Russell, ce qui dans le monde extérieur correspond aux énoncés, ce sont les faits. Il évite pourtant le terme « signifier » (*signify*) ou « dénoter » (*denote*), et emploie à la place « faire référence à » (*indicate*) — dans ses articles antérieurs, il emploie « exprimer » (*express*) ou « être un symbole de » (*to be a symbol for*) — parce qu'il tient que la relation entre un énoncé et un fait est tout à fait différente de la relation d'un nom à ce qu'il nomme. De plus, il

4. J'emploie le terme « signifier » dans la suite, parce qu'il correspond au mot allemand *bedeuten* que Frege, le premier à traiter du problème en question, employa à ce propos.

5. Les seules assomptions supplémentaires dont on aurait besoin pour obtenir une démonstration rigoureuse sont les suivantes : 1) que « $\varphi(a)$ » et la proposition « a est l'objet qui a la propriété φ et est identique à a » veulent dire la même chose, et 2) que toute proposition « parle de quelque chose », c'est-à-dire peut être mise sous la forme $\varphi(a)$. De plus, on aurait à utiliser le fait que pour n'importe quels objets $a.b.$ il existe une proposition vraie de la forme $\varphi(a, b)$, telle que par exemple, $a \neq b$ ou $a = a. b = b$.

6. Cf. « Sinn und Bedeutung », *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, vol. 100 (1892), p. 35.

emploie « dénoter » (au lieu de « signifier ») pour la relation entre les choses et les noms, de telle sorte que « dénoter » et « faire référence à » correspondraient ensemble au *bedeuten* de Frege. Ainsi, dans la terminologie et la conception de Russell, les énoncés vrais « ont pour référence » les faits et de même, les fausses ont pour référence rien [7]. Par là, la théorie de Frege s'appliquerait en un sens aux propositions fausses, puisqu'elles indiquent toutes la même chose, nommément rien. Mais différents énoncés vrais peuvent avoir pour référence de nombreuses choses différentes. Cette conception des énoncés impose donc ou bien d'abandonner le principe mentionné plus haut au sujet de la signification des expressions composées (c'est-à-dire, dans la terminologie de Russell, au sujet de leur dénotation et de leur référence), ou bien de nier qu'une locution descriptive dénote l'objet décrit. Russell choisit la seconde voie [8], en soutenant qu'une locution descriptive ne dénote rien du tout, et n'a de sens que par son contexte; par exemple, l'énoncé « l'auteur de *Waverley* est Scott » est défini de telle sorte qu'il signifie : « Il existe exactement une seule entité qui a écrit *Waverley*; et quiconque a écrit *Waverley* est Scott. » Cela veut dire qu'un énoncé comportant la locution « l'auteur de *Waverley* » ne fait (à strictement parler) aucune assertion sur Scott, mais qu'il est seulement une manière contournée de faire une assertion quelconque sur les concepts qui apparaissent dans la locution descriptive. Russell allègue principalement deux arguments en faveur de cette conception, nommément 1) qu'une locution descriptive peut être employée sans être dénuée de sens (*meaningfully*) même si l'objet décrit n'existe pas (par exemple dans l'énoncé : « le présent roi de France n'existe pas »); 2) qu'on peut très bien comprendre un énoncé contenant une locution descriptive sans avoir connaissance de l'objet décrit; tandis qu'il paraît impossible de comprendre un énoncé sans avoir connaissance des objets sur lesquels l'assertion est prononcée. Le fait que Russell ne considère pas toute la question de l'interprétation des descriptions comme une affaire de simples conventions linguistiques, mais plutôt comme une question où il y va du vrai et du faux, est un autre exemple de son attitude réaliste, à moins peut-être qu'il n'ait eu en vue un examen seulement psychologique des processus effectifs de la pensée. Quant à l'aspect logique de la question, je ne peux me défaire de l'impression que la théorie russellienne des descriptions n'a fait qu'éluder la conclusion déconcertante (*puzzling*) de Frege, et qu'il y a derrière celle-ci quelque chose qui n'a pas encore été parfaitement compris.

7. De la référence (*Bedeutung*) d'un énoncé, on doit distinguer ce que Frege appelle son sens (*Sinn*), qui est le corrélat conceptuel du fait objectivement existant (ou « le Vrai »). On pourrait s'attendre à ce que ce soit dans la théorie de Russell un fait possible (ou plutôt la possibilité d'un fait), qui existerait aussi dans le cas d'une proposition fausse. Mais Russell, comme il le dit lui-même, n'a jamais pu croire que de telles choses « étranges et fantomatiques » (*curious shadowy*) existaient réellement. Troisièmement, il y a aussi le corrélat psychologique du fait, qui est nommé « signification », et qui s'avère correspondre à la croyance (*belief*) dans le dernier livre de Russell. « Énoncé » (*sentence*) par opposition à « proposition » (*proposition*) est employé pour dénoter la simple combinaison de symboles.

8. Il n'a rien dit explicitement de la première; mais il semble qu'elle serait valide pour le système logique des *Principia*, bien que peut-être d'une façon plus ou moins vide.

Il y a, semble-t-il, un point de vue purement formel sous lequel on pourrait donner la préférence à la théorie russellienne des descriptions. En définissant de la manière précédente le sens des énoncés comportant des descriptions, Russell évite d'inscrire dans son système logique aucun axiome au sujet de la particule « le », c'est-à-dire que le caractère analytique des théorèmes portant sur « le » est explicité; on peut montrer qu'ils suivent de la définition explicite du sens des énoncés comportant « le ». Frege, au contraire, est obligé d'assumer un axiome sur « le », qui, bien sûr, est aussi analytique, mais d'une manière implicite seulement, pour autant qu'il suit du sens des termes non définis. Un examen plus approfondi montre pourtant que cet avantage de la théorie de Russell sur celle de Frege ne subsiste que si l'on interprète les définitions comme de simples abréviations typographiques, et qu'on ne considère pas qu'elles introduisent des noms pour les objets qu'elles décrivent, trait commun à Frege et Russell.

J'en viens maintenant aux plus importantes parmi les recherches de Russell dans le champ de l'analyse des concepts de la logique formelle, à savoir celles qui concernent les paradoxes logiques et leurs solutions. En analysant les paradoxes auxquels la théorie cantorienne des ensembles avait conduit, il les libéra de toute technicité mathématique, mettant ainsi en lumière que nos intuitions logiques (c'est-à-dire nos intuitions des notions telles que : vérité, concept, être, classe, etc.) sont contradictoires avec elles-mêmes. Il chercha ensuite où et comment ces assomptions du bon sens en logique doivent être corrigées, et arriva à la conclusion que l'axiome erroné consiste à assumer que pour toute fonction propositionnelle il existe la classe des objets qui la satisfait, ou que toute fonction propositionnelle existe « en tant qu'entité distincte » [9]; par quoi on entend à la fois quelque chose de séparable de l'argument (l'idée étant que les fonctions propositionnelles sont abstraites de propositions qui sont données à l'origine), et de distinct de la combinaison des symboles qui expriment la fonction propositionnelle; c'est alors ce qu'on peut appeler la notion ou le concept défini par elle [10]. L'existence de ce concept suffit déjà à expliquer les paradoxes dans leur forme « intensionnelle », où le concept « ne pas s'appliquer à soi-même » prend la place de la classe paradoxale de Russell.

Une fois rejetée l'existence d'une classe ou d'un concept en général, il reste à déterminer à quelles conditions (portant sur la fonction propositionnelle) ces entités existent bien. Russell a indiqué (*loc. cit.*) deux directions

9. Dans le premier article de Russell sur le sujet : « On some Difficulties in the Theory of Transfinit Numbers and Order Types », *Proc. London Math. Soc.*, Second series, vol. 4, 1906, p. 29. Si l'on veut examiner des paradoxes comme « le menteur » sous cet angle, on doit considérer que les propositions universelles (et existentielles) mettent en jeu la classe des objets auxquels elles se réfèrent.

10. Une « fonction propositionnelle » (sans la clause « en tant qu'entité distincte ») peut être entendue comme une proposition dans laquelle un ou plusieurs constituants sont désignés comme arguments. On pourrait penser que la paire formée de la proposition et de l'argument serait alors susceptible de jouer le rôle de la « fonction propositionnelle en tant qu'entité distincte », mais on doit remarquer que cette paire (en tant qu'une seule entité) est à son tour un ensemble ou un concept, et donc n'existe pas nécessairement.

dans lesquelles on peut chercher un tel critère, et qu'il a nommées respectivement la théorie zig-zag et la théorie de la limitation de taille; on pourrait peut-être les appeler d'une façon plus parlante la théorie en compréhension et la théorie en extension. La seconde ferait dépendre l'existence d'une classe ou d'un concept de l'extension de la fonction propositionnelle (exigeant qu'elle ne soit pas trop grande), la première de son contenu ou sens (exigeant une certaine sorte de « simplicité », dont la formulation précise serait le problème à résoudre).

Le trait le plus caractéristique de la seconde théorie (dans son opposition à la première) serait constitué par la non-existence de la classe universelle, ou (selon l'interprétation en compréhension) de la notion de « quelque chose » sans restriction de sens. La théorie axiomatique des ensembles, telle qu'elle fut par la suite développée par Zermelo et d'autres, peut être considérée comme une élaboration de cette idée en ce qui concerne les classes seulement [11]. En particulier, la locution « pas trop grand » peut être spécifiée (comme l'a montré J. v. Neumann) [12] de façon à signifier : non-équivalent à l'univers de toutes choses, ou, pour être plus précis, on peut considérer qu'une fonction propositionnelle détermine une classe quand et seulement quand il n'existe pas de relation (en compréhension, c'est-à-dire une fonction propositionnelle avec deux variables) qui associe bi-univoquement à chaque objet un objet satisfaisant la fonction propositionnelle, et vice versa. Ce critère, pourtant, n'apparaît pas comme la base de la théorie, mais comme une conséquence des axiomes, et, inversement, peut remplacer deux des axiomes (l'axiome du remplacement et celui du choix).

Quant à la seconde des suggestions de Russell, c'est-à-dire la théorie zig-zag, pour elle aussi un système logique a été récemment édifié qui partage quelques traits essentiels avec ce schéma, nommément le système de Quine [13]. Il se pourrait bien, en outre, qu'il y ait d'autres possibilités intéressantes dans cette voie.

Le travail ultérieur de Russell lui-même pour résoudre les paradoxes n'emprunta aucune des deux directions mentionnées ci-dessus, qu'il avait lui-même indiquées, mais s'appuya pour une large mesure sur une idée plus radicale, la théorie « pas-de-classe » : les classes ou les concepts n'existent *jamais* comme des objets réels, et les énoncés qui contiennent ces termes n'ont de sens que dans la mesure où ils peuvent être interprétés comme une *façon de parler* * des autres choses (Cf. p. 97). Étant donné pourtant que dans les *Principia* et ailleurs, Russell formula comme des principes logiques généraux certains principes découverts dans le développement de cette théorie, sans

11. On peut venir à bout des paradoxes de la compréhension avec, par exemple, la théorie des types simples, ou la hiérarchie ramifiée, qui ne font intervenir aucune restriction indésirable si on les applique aux concepts seulement et non aux ensembles.

12. Cf. « Über eine Widerspruchfreiheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre », *Journal für reine und angewandte Mathematik*, Vol. 160, 1929, p. 227.

13. Cf. « New Foundations for Mathematical Logic », *Amer. Math. Monthly*, Vol. 44, p. 70.

* En français dans le texte.

indiquer plus longtemps qu'ils dépendaient de la théorie « pas-de-classe », je vais traiter d'abord de ces principes.

J'entends en particulier le principe du cercle vicieux, qui interdit une certaine sorte de « circularité », rendue responsable des paradoxes. L'illusion qu'ils présentent se produit, est-il affirmé, parce qu'on définit (ou qu'on accepte sans le dire) des totalités dont l'existence impliquerait l'existence de nouveaux éléments de la même totalité, nommément des éléments définissables seulement dans les termes de la totalité dans son ensemble. On est conduit par là à formuler un principe disant que « aucune totalité ne peut contenir des membres définissables seulement dans les termes de cette totalité, ou des membres mettant en jeu (*involving*) ou présupposant cette totalité » [principe du cercle vicieux]. Afin de rendre ce principe applicable aux paradoxes de la compréhension, un autre principe encore dut être assumé, nommément que « toute fonction propositionnelle présuppose la totalité de ses valeurs », et évidemment aussi, par conséquent, la totalité de ses arguments possibles [14]. [Sans quoi le concept de « ne pas s'appliquer à soi-même » ne présupposerait aucune totalité (puisqu'il ne met en jeu aucun quantificateur) [15] et le principe du cercle vicieux n'empêcherait pas son application à lui-même.] Ce principe du cercle vicieux a donc pour conséquence un principe correspondant pour les fonctions propositionnelles, qui énonce que rien de ce qui est défini dans les termes d'une fonction propositionnelle ne peut être un argument possible de cette fonction [16]. Le système logique auquel on est conduit sur la base de ces principes est la théorie des ordres dans la forme adoptée, par exemple, dans la première édition des *Principia*, selon laquelle une fonction propositionnelle qui ou bien contient des quantificateurs se référant aux fonctions propositionnelles d'ordre n, ou bien peut être affirmée sans non-sens de fonctions propositionnelles d'ordre n, est au moins d'ordre $n+1$, et que le domaine de signifiance [*range of significance*] d'une fonction propositionnelle aussi bien que le domaine d'un quantificateur doivent toujours être confinés à un ordre défini.

Dans la seconde édition des *Principia*, pourtant, il est déclaré dans l'introduction (p. XI et XII) que, « dans un sens limité », des fonctions d'un ordre supérieur au prédicat lui-même (et par conséquent des fonctions définies dans les termes du prédicat comme, par exemple, dans $p'\kappa\epsilon\kappa$) peuvent également apparaître comme arguments d'un prédicat de fonctions, et dans l'appendice B, de telles choses se produisent constamment. Cela veut dire que le principe du cercle vicieux pour les fonctions propositionnelles est virtuellement abandonné. Ce changement est en rapport avec le nouvel axiome selon lequel des fonctions ne peuvent figurer dans des propositions que « par le biais de leurs valeurs », c'est-à-dire en extension, ce qui a cette

14. Cf. *Principia Mathematica*, vol. I, p. 39.

15. Les quantificateurs sont les deux symboles ($\exists x$) et (x), signifiant respectivement « il existe un objet x », et « pour tous les objets x ». La totalité des objets x à laquelle ils se réfèrent est appelée leur domaine (*range*).

16. Cf. *Principia Mathematica*, vol. I, p. 47, section IV.

conséquence que n'importe quelle fonction propositionnelle peut prendre pour argument n'importe quelle fonction d'un type approprié, dont l'extension est définie (quel que soit l'ordre de quantificateurs utilisé dans la définition de cette extension). Il ne fait pas de doute qu'il n'y a rien à redire à tout cela, même du point de vue constructif (voir p. 15), à condition que les quantificateurs soient toujours restreints à des ordres définis. Les paradoxes sont évités par la théorie des types simples [17], qui dans les *Principia* est associée à la théorie des ordres (ce qui a pour résultat la « hiérarchie ramifiée »), mais qui en est entièrement indépendante, et n'a rien à faire avec le principe du cercle vicieux (cf. p. 102).

Si on en vient maintenant au principe du cercle vicieux proprement dit, tel qu'il est formulé p. 91, on doit premièrement remarquer que, à partir des expressions « définissables seulement dans les termes de », « mettant en jeu », et « présupposant », nous avons en fait trois principes différents, parmi lesquels le second et le troisième sont beaucoup plus vraisemblables que le premier. C'est la première forme qui est d'un intérêt particulier, parce qu'elle est la seule à rendre impossibles les définitions imprédicatives [18], et qu'elle détruit par là la dérivation des mathématiques à partir de la logique, effectuée par Dedekind et Frege, et une bonne partie des mathématiques modernes elles-mêmes. On peut démontrer que le formalisme des mathématiques classiques ne satisfait pas au principe du cercle vicieux dans sa première forme, puisque les axiomes impliquent l'existence de nombres réels qui ne sont définissables dans ce formalisme que par référence à tous les nombres réels. Puisque les mathématiques classiques peuvent être construites sur la base des *Principia* (y compris l'axiome de réductibilité), il s'ensuit que même les *Principia* (dans la première édition) ne satisfont pas au principe du cercle vicieux dans la première forme, si « définissable » signifie « définissable à l'intérieur du système », et si aucune méthode de définition à l'extérieur du système (ou à l'extérieur d'autres systèmes des mathématiques classiques) n'est connue, à part celles qui mettent en jeu des totalités encore plus étendues que les totalités figurant dans les systèmes.

17. Par théorie des types simples, j'entends la doctrine qui soutient que les objets de pensée(ou, dans une autre interprétation, les expressions symboliques) sont divisés en types, à savoir : les individus, les propriétés des individus, les relations entre individus, les propriétés de telles relations, etc. (avec une hiérarchie similaire pour les extensions), — et que les énoncés de la forme « a a la propriété φ », « b entretient la relation R avec c, etc. n'ont pas de sens, si a, b, c, R, φ ne sont pas de types qui s'accordent. Les types mêlés (tels que les classes contenant comme éléments des individus et des classes) et par voie de conséquence les types transfinis (tels que la classe de toutes les classes de types finis) sont exclus. Que la théorie des types simples suffise à éviter également les paradoxes épistémologiques est mis en évidence par une analyse plus poussée de ceux-ci (Cf. l'article de F. P. Ramsey, cité dans la note 21, et A. Tarski, « Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen », *Stud. phil.*, Vol. 1, Lemberg, 1935, p. 399.

18. Ce sont là des définitions d'un objet α par référence à une totalité à laquelle appartient α lui-même (et peut-être aussi des choses qui ne sont définissables qu'en termes de α.). Ainsi, par exemple, si on définit une classe α comme l'intersection de toutes les classes satisfaisant une certaine condition φ, pour conclure ensuite que α est aussi un sous-ensemble de classes u telles qu'elles sont définies en termes de α (sous la condition qu'elles satisfassent φ).

A mes yeux, ce qui précède démontre plutôt la fausseté du principe du cercle vicieux que celles de mathématiques classiques, et, de fait, la fausseté du principe est également vraisemblable par elle-même. Car, tout d'abord, on peut à bon droit nier que faire référence à une totalité implique nécessairement de faire référence à tous les éléments particuliers de celle-ci, ou, en d'autres termes, que « tous » signifie la même chose qu'une conjonction logique infinie. On peut, par exemple, en suivant la suggestion de Langford et de Carnap [19] donner à « tous » le sens de l'analytique ou du nécessaire ou du démontrable. Cette conception comporte certes des difficultés; mais il ne fait pas de doute que de cette façon la circularité des définitions imprédicatives disparaît.

Deuxièmement, même si « tous » signifie une conjonction infinie, il semble pourtant que le principe du cercle vicieux dans sa première forme s'applique seulement si les totalités en jeu ont été construites par nous-mêmes. Dans ce cas, il doit de toute évidence exister une définition (nommément la description de la construction) qui ne se réfère pas à une totalité à laquelle l'objet défini appartienne, parce que la construction d'une chose ne peut certainement pas être fondée sur une totalité de choses à laquelle la chose à construire appartient. S'il s'agit néanmoins d'objets qui existent indépendamment de nos constructions, il n'est pas absurde le moins du monde qu'existent des totalités contenant des membres qui ne peuvent être décrits (c'est-à-dire caractérisés de manière univoque) [20] que par référence à la totalité qui les contient [21]. Une telle situation ne contredirait même pas la seconde forme du principe du cercle vicieux, puisqu'on ne peut pas dire qu'un objet décrit par référence « mette en jeu » cette totalité, bien que la description elle-même le fasse; il ne contredirait pas non plus la troisième forme, si « présupposer » signifie « présupposer quant à son existence », et non « quant à sa connaissance ».

Il semble ainsi que le principe du cercle vicieux, dans sa première forme, ne s'applique que si l'on prend le point de vue constructiviste (ou nominaliste [22]) à l'égard des objets de la logique et des mathématiques, en particulier à l'égard des propositions, des classes et des notions, — si par exemple on entend par notion un symbole joint à une règle permettant de traduire les énoncés qui contiennent le symbole en d'autres qui ne le contiennent pas, de telle sorte que l'existence séparée d'un objet dénoté par le symbole apparaît comme une simple fiction [23].

19. Voir Rudolf Carnap dans *Erkenntnis*, vol. 2, p. 103, et *Logical Syntax of Language*, p. 162, et C. H. Langford, *Bulletin American Mathematical Society*, vol. 33 (1927), p. 599.

20. On dit qu'un objet a est décrit par une fonction propositionnelle $\varphi(x)$ si $\varphi(x)$ est vrai pour $x = a$, et pour aucun autre objet.

21. Cf. F. P. Ramsey, « The Foundations of Mathematics », in *Proc. London Math. Soc.*, Séries 2, vol. 25 (1926), p. 338 (Réédité dans *The Foundations of Mathematics*, New York and London, 1931, p. 41).

22. J'emploierai par la suite « constructivisme » comme un terme général désignant à la fois ces points de vue et des tendances comme celles auxquelles donne corps la théorie « pas-de-classe » de Russell.

23. On pourrait penser que cette conception des notions est impossible parce que les énoncés dans lesquels on traduit doivent aussi contenir des notions, si bien qu'on entrerait dans une régression infinie.

Pourtant, on peut aussi concevoir les classes et les objets comme des objets réels, c'est-à-dire tenir les classes pour des « pluralités de choses » ou pour des structures consistant dans une pluralité de choses, et les concepts pour les propriétés et les relations des choses existant indépendamment de nos définitions et de nos constructions.

Il me semble quant à moi qu'assumer l'existence de tels objets est aussi légitime que d'assumer celle des corps physiques, et qu'il est tout à fait aussi raisonnable d'y croire. Ils sont nécessaires pour obtenir un système satisfaisant des mathématiques, dans le même sens où les corps physiques sont nécessaires à une théorie satisfaisante de nos perceptions sensibles, et dans les deux cas il est impossible d'interpréter les propositions qu'on veut énoncer sur ces entités comme des propositions sur les « données » c'est-à-dire, dans le dernier cas, sur les perceptions sensibles qui se présentent effectivement. Russell lui-même conclut dans le dernier chapitre de son livre *Meaning and Truth*, bien qu' « avec hésitation », qu'il existe des « universaux », mais il désire apparemment restreindre la portée de cette déclaration aux concepts des perceptions sensibles, ce qui n'est d'aucune aide au logicien. Dans ce qui suit, j'emploierai le terme de « concept » dans ce sens objectif exclusivement. On pourrait dire qu'il y a une différence formelle entre les deux conceptions des notions, qui tient à ce qu'on peut considérer que deux définitions différentes quelconques de la forme $\alpha(x) = \varphi(x)$ définissent deux notions α différentes, au sens constructiviste. (Ce serait en particulier le cas pour l'interprétation nominaliste du terme de « notion » suggérée ci-dessus, étant donné que deux définitions semblables donnent des règles de traduction différentes pour les propositions qui contiennent α.) Pour les concepts, au contraire, ce n'est pas du tout le cas puisque la même chose peut être décrite de différentes façons. Il se peut même que l'axiome d'extensionalité [24], ou au moins quelque chose d'approchant, soit valable pour les concepts. La définition suivante du nombre deux peut illustrer la différence : « Deux est la notion sous laquelle tombent toutes les paires et rien d'autre. » Il y a certainement plus d'une notion au sens constructiviste qui satisfait cette condition, mais il se peut qu'il y ait une « forme », ou une « nature », commune à toutes les paires.

Étant donné que le principe du cercle vicieux dans sa première forme s'applique bien aux entités construites, les définitions imprédicatives et la totalité de toutes les notions, ou de toutes les classes, ou de toutes les propositions, ne peuvent pas être reçues dans la logique constructiviste. Donner une définition imprédicative, exigerait de construire une notion en combinant un ensemble de notions auquel la notion à former appartient

---

Néanmoins cela ne ferme pas la possibilité de conserver le point de vue ci-dessus pour toutes les notions plus abstraites, comme celles du second type et des types supérieurs, ou, en fait, pour toutes les notions à l'exception des termes primitifs qui pourraient n'être qu'un très petit nombre.

24. C'est-à-dire : qu'il n'y a pas deux propriétés différentes qui appartiennent exactement aux mêmes choses, ce qui, en un sens, est la contrepartie du *Principium identitatis indiscernibilium* de Leibniz, selon lequel il n'y a pas deux choses différentes qui aient exactement les mêmes propriétés.

elle-même. De ce fait, si on tente de retraduire un énoncé contenant le symbole d'une notion ainsi définie d'une manière imprédicative, il se trouve que ce qu'on obtient contiendra de nouveau un symbole de la notion en question [25]. Il en est ainsi du moins si « tous » signifie une conjonction infinie; mais l'idée de Carnap et de Langford (mentionnée p. 93) ne serait d'aucun secours en l'occurrence, parce que la « démontrabilité », si elle était introduite d'une façon compatible avec la conception constructiviste des notions, aurait à se diviser (*split*) en une hiérarchie d'ordres, qui empêcherait d'obtenir les résultats désirés [26]. Comme Chwistek l'a montré [27], il est même possible, à condition de faire certaines assomptions recevables à l'intérieur de la logique constructiviste, de dériver une contradiction effective de l'utilisation sans restriction de définitions imprédicatives. Pour être plus précis, il a montré que le système des types simples devient contradictoire si on y ajoute « l'axiome de compréhension » qui énonce (en gros) qu'à des définitions différentes appartiennent des notions différentes. Cet axiome, pourtant, comme on vient de l'indiquer, peut être considéré comme valable pour les notions au sens constructiviste.

S'agissant de concepts, l'aspect de la question change du tout au tout. Puisque les concepts sont supposés exister objectivement, il semble qu'il n'y ait d'objection ni à parler d'eux tous (cf. p. 99), ni à décrire certains d'entre eux par référence à tous (ou au moins à tous ceux d'un type donné). Mais, peut-on demander, cette conception n'est-elle pas également réfutable pour les concepts, puisqu'elle conduit à cette « absurdité » qu'il devra exister des propriétés φ telles que $\varphi(a)$ consiste en un certain état de choses mettant en jeu toutes les propriétés (y compris φ elle-même et les propriétés définies dans les termes de φ) ce qui voudrait dire que le principe du cercle vicieux n'est pas valable, même dans sa seconde forme, pour les concepts ou les propositions? Il ne fait pas de doute que la totalité de toutes les propriétés (ou de toutes celles d'un type donné) conduit bien à des situations de cette sorte, mais je ne pense pas qu'elles contiennent une absurdité quelconque [28]. Il est vrai que de telles propriétés φ [ou de telles propositions $\varphi(a)$] auront à se contenir elles-mêmes à titre de constituants de leur contenu [ou de leur sens], et, en fait, à bien des titres, à cause des propriétés définies dans les termes de φ; mais cela rend seulement impossible de cons-

25. Cf. Carnap, *loc. cit.*, note 19.

26. Néanmoins le schéma est intéressant parce qu'il montre encore une fois le caractère constructif de notions qui ne perdent pas leur sens lorsqu'elles sont appliquées à des notions d'ordre arbitrairement élevé.

27. Voir *Erkenntnis*, vol. 3, p. 367.

28. Le système formel correspondant à cette conception comporterait, à la place de l'axiome de réductibilité, la règle de substitution pour les fonctions, décrite par exemple dans Hilbert-Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, vol. 1 (1934), p. 90, appliquée aux variables de n'importe quel type, et accompagnée de certains axiomes de compréhension exigés par le concept de propriété qui, pourtant, seraient plus faibles que celui de Chwistek. On doit remarquer que cette conception n'implique pas nécessairement l'existence de concepts qui ne peuvent être exprimés dans le système, si on l'associe à une solution des paradoxes sur le modèle indiqué p. 103.

truire leur sens (c'est-à-dire, le considérer comme une assertion sur les perceptions sensibles ou toute autre entité non-conceptuelle), ce qui n'est pas une objection pour qui prend le point de vue réaliste. De même il n'est pas contradictoire qu'une vraie partie soit identique (non pas simplement égale) au tout, comme on le voit dans le cas des structures au sens abstrait. La structure de la série des entiers, par exemple, se contient elle-même comme vraie partie, et on voit aisément qu'il existe aussi des structures contenant un nombre infini de parties différentes, dont chacune contient l'ensemble de la structure comme une partie. Au surplus, il existe, même à l'intérieur du domaine de la logique constructiviste, des éléments qui sont proches de l'autoréflexivité des propriétés imprédicatives, à savoir des propositions qui contiennent, comme parties de leur sens, non pas elles-mêmes, mais leur propre démontrabilité formelle [29]. Or la démontrabilité formelle d'une proposition (lorsque les axiomes et les règles d'inférence sont corrects) implique cette proposition, et, dans beaucoup de cas, lui est équivalente. En outre, il existe sans aucun doute des énoncés qui se réfèrent à une totalité d'énoncés dont ils font eux-mêmes partie, comme, par exemple, l'énoncé : « Tout énoncé (d'un langage donné) contient au moins un mot exprimant une relation. »

Il va de soi que cette conception des propriétés imprédicatives impose de chercher une autre solution des paradoxes : l'illusion (c'est-à-dire l'axiome erroné sous-jacent) ne résiderait pas alors dans l'assomption de certaines autoréflexivités des termes primitifs, mais dans d'autres assomptions à leur sujet. Une telle solution peut être trouvée pour l'heure dans la théorie simple des types, et pour l'avenir, peut-être dans le développement des idées esquissées p. 90 et p. 104. Tout cela ne se réfère bien sûr qu'aux concepts. Pour ce qui est des notions au sens constructiviste, il ne fait pas de doute que les paradoxes sont dus à un cercle vicieux. Il n'est pas surprenant que les paradoxes aient des solutions différentes selon les différentes interprétations des termes en jeu.

Pour ce qui est des classes entendues comme pluralités ou totalités, il semblerait qu'elles sont également non pas créées, mais simplement décrites par leurs définitions, et que par conséquent le principe du cercle vicieux sous sa première forme ne s'y applique pas. Je pense même qu'il existe des interprétations du terme de « classe » (nommément celles qui en font une certaine sorte de structures) où il ne s'applique pas non plus sous sa seconde forme [30]. Mais pour le développement de toutes les mathématiques contemporaines, on peut même assumer qu'il s'applique bien sous

29. Cf. mon article dans *Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 38, (1931), p. 173, ou R. Carnap, *Logical Syntax of Language*, § 35.

30. Des idées qui vont dans ce sens sont exposées dans les articles suivants de D. Mirimanoff : « Les antinomies de Russell et de Burali-Forti et le problème fondamental de la théorie des ensembles », *l'Enseignement mathématique*, vol. 19 (1917), p. 37-52, et « Remarques sur la théorie des ensembles et les antinomies cantoriennes », *l'Enseignement mathématique*, vol. 19 (1917), p. 209-217 et vol. 21 (1920), p. 29-52. Cf. en particulier vol. 19, p. 212.

sa seconde forme, ce qui est en vérité, pour les classes conçues comme simples totalités, très vraisemblable. On est alors conduit à quelque chose comme l'axiome de Zermelo pour la théorie des ensembles, c'est-à-dire que les ensembles sont divisés en « niveaux » de telle façon que seuls les ensembles des niveaux inférieurs peuvent être éléments des ensembles de niveaux supérieurs (c'est-à-dire $x \in y$ est toujours faux si x appartient à un niveau supérieur à y). Il n'y a aucune raison pour que des classes en ce sens-là excluent les mélanges de niveaux dans un ensemble, et les niveaux transfinis. La place de l'axiome de réductibilité est maintenant prise par l'axiome des classes [l'*Aussonderungsaxiom* de Zermelo] qui énonce que, à chaque niveau, il existe pour une fonction propositionnelle arbitraire $\varphi(x)$, l'ensemble des x du niveau pour lesquels $\varphi(x)$ est vrai, et cela semble être impliqué par le concept des classes comme pluralité.

Russell allègue deux raisons contre la conception extensionnelle des classes, à savoir l'existence 1) de la classe nulle, qu'on ne voit pas très bien être une collection, et 2) des classes-unités, qui devraient être identiques à leur élément unique. Mais il me semble que ces arguments, s'ils prouvent quelque chose, prouvent tout au plus que la classe nulle et les classes-unités (en tant que distinctes de leur seul élément) sont des fictions (introduites pour simplifier le calcul comme les points à l'infini en géométrie), et non pas que toutes les classes sont des fictions.

Mais chez Russell, les paradoxes ont induit une tendance prononcée à pousser la construction de la logique aussi loin que possible sans assumer l'existence objective d'entités telles que les classes et les concepts. Cela l'a conduit à formuler la théorie « pas-de-classe » déjà mentionnée, selon laquelle les classes et les concepts devaient être introduits comme une *façon de parler* *. Mais les propositions, à leur tour, (en particulier celles qui mettent en jeu des quantificateurs) [31], furent par la suite incluses pour une large mesure dans ce schéma, qui n'est qu'une conséquence logique de la position adoptée, puisque, par exemple, les propositions universelles, en tant qu'entités existant objectivement, appartiennent de toute évidence à la même catégorie d'objets idéaux que les classes et les concepts, et conduisent à des paradoxes de la même sorte, si on les admet sans restrictions. En ce qui touche aux classes, ce programme a été effectivement rempli; c'est-à-dire que les règles pour traduire les énoncés contenant des noms de classe ou le terme « classe » en des énoncés qui ne les contiennent pas furent formulées explicitement; et la base de la théorie, c'est-à-dire le domaine des énoncés qu'on a à obtenir par traduction, est si bien assurée qu'on peut (à l'intérieur du système *Principia*) se dispenser des classes, mais seulement à la condition d'assumer l'existence d'un concept chaque fois qu'on veut construire une classe. Quand on en vient aux concepts et à l'interprétation des énoncés qui contiennent ce terme, ou quelque syno-

31. « Les paradoxes de la logique », *Revue de Métaphysique et de Morale*, vol. 14 (1906), p. 627.
* En français dans le texte.

nyme, les choses ne sont en rien aussi bien assurées. En premier lieu, quelques-uns d'entre eux (les prédicats primitifs et les relations primitives, comme, par exemple, « rouge » ou « plus froid ») doivent apparemment être considérés comme des objets réels [32]; le reste (et en particulier, selon la seconde édition des *Principia*, toutes les notions d'un type supérieur au premier, et par conséquent toutes celles qui intéressent la logique), apparaît comme quelque chose de construit (c'est-à-dire comme quelque chose qui n'appartient pas à « l'inventaire » du monde); mais ni le domaine fondamental des propositions dans les termes desquelles tout, en définitive, est à interpréter, ni la méthode d'interprétation, ne sont aussi assurées que dans le cas des classes (voir ci-dessous).

Le schéma complet de la théorie « pas-de-classe » est d'un grand intérêt, parce que c'est un des rares exemples, exécuté en détail, de la tendance à éliminer les assomptions sur l'existence d'objets en dehors des « données », et à les remplacer par des constructions effectuées sur la base de ces données [33]. Dans le cas présent, le résultat a été, pour l'essentiel, négatif, c'est-à-dire que les classes et les concepts introduits de cette façon n'ont pas toutes les propriétés que requiert leur emploi dans les mathématiques, à moins d'introduire des axiomes spéciaux au sujet des données (par exemple, l'axiome de réductibilité) — axiomes dont le sens profond est de poser d'emblée l'existence dans les données des objets à construire —, ou bien encore de forger la fiction qu'on peut former des propositions de longueur infinie (ou même non-dénombrable) [34], c'est-à-dire opérer avec des fonctions de vérité dont les arguments sont en nombre infini, sans s'occuper de savoir si on peut les construire ou non. Mais qu'est-ce qu'une telle fonction de vérité infinie, sinon une espèce particulière d'extension (ou de structure) infinie, et même une extension plus compliquée qu'une classe, dotée en plus d'un sens hypothétique, qui ne peut être compris que par un esprit infini ? Tout cela ne sert qu'à vérifier la conception défendue plus haut, comme quoi la logique et les mathématiques (tout comme la physique) sont édifiées sur des axiomes dont le contenu est réel et ne peut pas être « supprimé par élucidation » (*explained away*).

Ce qu'on peut obtenir à partir de l'attitude constructiviste, c'est la théorie des ordres (cf. p. 92); c'est à présent seulement (et c'est le point fort de la théorie) que les restrictions en cause n'apparaissent pas comme des hypothèses *ad hoc* pour éviter les paradoxes, mais comme des conséquences inévitables de la thèse selon laquelle les classes, les concepts, et les propositions quantifiées n'existent pas en tant qu'objets réels. Ce n'est pas comme si l'univers des choses était divisé en ordres, et puis qu'on interdise de parler de tous

32. Dans l'appendice C des *Principia*, est esquissée une manière de construire ceux-ci par le moyen de certaines relations de similarité entre les propositions atomiques, de telle sorte que celles-ci seraient les seules à rester des objets réels.

33. On doit comprendre ici « données » en un sens relatif, c'est-à-dire, dans notre cas, comme la logique sans l'assomption de l'existence des classes et des concepts.

34. Cf. Ramsey, *loc. cit.* note 21.

les ordres; mais, au contraire, il est possible de parler de toutes les choses existantes; seulement, classes et concepts ne sont pas dans leur nombre; et si on les introduit comme des *façons de parler* *, il advient que cette extension même du symbolisme ouvre la possibilité de les introduire d'une façon plus étendue, et ainsi de suite indéfiniment. Afin d'exécuter ce schéma, on doit, pourtant, présupposer l'arithmétique (ou quelque chose d'équivalent), ce qui prouve seulement que même cette logique restreinte ne peut être édifiée sur rien.

Dans la première édition des *Principia*, où il s'agissait d'édifier effectivement la logique et les mathématiques, l'attitude constructiviste fut, pour la majeure partie, abandonnée, étant donné que l'axiome de réductibilité pour les types supérieurs au premier, joint à l'axiome d'infinité, rend absolument nécessaire qu'il existe des prédicats primitifs pour des types arbitrairement élevés. Ce qui reste de l'attitude constructiviste, c'est seulement : 1) l'introduction des classes comme une *façon* de *parler* *; 2) la définition de $\sim$, $\vee$,., etc., en tant qu'appliqués à des propositions contenant des quantificateurs (ce qui incidemment a montré sa fécondité dans une démonstrations de consistance pour l'arithmétique); 3) la construction pas à pas des fonctions d'ordre supérieur à 1, ce qui, pourtant, est rendu superflu en raison de l'axiome de réductibilité; 4) l'interprétation des définitions comme de simples abréviations typographiques, ce qui fait de chaque symbole introduit par définition un symbole incomplet (et non pas un symbole nommant un objet décrit par la définition). Mais le dernier point est, dans une large mesure, une illusion, parce que, en raison de l'axiome de réductibilité, il existe toujours des objets réels, sous la forme de prédicats primitifs, ou de leurs combinaisons, correspondant à chaque symbole défini. En définitive la théorie des descriptions de Russell est quelque chose qui appartient aussi à l'ordre d'idées constructiviste.

Dans la seconde édition des *Principia* (ou pour être plus précis, dans l'introduction de celle-ci) l'attitude constructiviste est de nouveau adoptée. L'axiome de réductibilité est abandonné, et il est explicitement déclaré que tous les prédicats primitifs appartiennent au type le plus bas, et que les variables (et, de toute évidence, les constantes également) des ordres et des types plus élevés ont pour seul but de permettre de poser des fonctions de vérité plus compliquées pour les propositions atomiques [35], ce qui n'est qu'une autre manière de dire que les types et les ordres plus élevés ne sont qu'une *façon de parler* *. Cette déclaration nous apprend en même temps de quelle sorte de propositions la base de la théorie doit être faite, à savoir des fonctions de vérité de propositions atomiques.

Pourtant, cela ne va sans difficulté que si le nombre des individus et des prédicats primitifs est fini. Pour le cas contraire, qui est surtout intéressant si on veut dériver les mathématiques, Ramsey (*loc. cit.*) a pris le parti de

* En français dans le texte.

35. C'est-à-dire des propositions de la forme S (*a*), R (*a*, *b*), etc., où S, R, sont des prédicats primitifs, et *a*, *b*, des individus.

considérer notre incapacité à former des propositions de longueur infinie comme un « simple accident », à négliger par le logicien. Il va de soi que cela résout (ou plutôt tranche) les difficultés; on doit noter que si on laisse de côté à cet égard la différence entre fini et infini, il existe une interprétation plus simple, et qui va en même temps bien plus loin, de la théorie des ensembles (et, par-dessus le marché, des mathématiques). Plus précisément, dans le cas d'un nombre fini d'individus, *l'aperçu* * de Russell, qui dit que des propositions portant sur des classes peuvent être interprétées comme des propositions portant sur leurs éléments, devient littéralement vrai, puisque, par exemple, « $x \in m$ » est équivalent à « $x = a_1 \vee x = a_2 \vee \ldots \vee x = a_k$ » où les a_i sont les éléments de m; et « il existe une classe telle que... » est équivalent à : « il existe des individus $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tels que... »[36], pourvu que n soit le nombre des individus existant dans le monde, et pourvu que nous négligions pour l'instant la classe nulle, dont il faudrait prendre soin par une clause supplémentaire. Il va de soi que, par une répétition de cette procédure, on peut obtenir des classes de classes, etc., si bien que le système logique obtenu ressemblerait à la théorie des types simples, à ceci près que des mélanges de types seraient possibles. La théorie axiomatique des ensembles apparaît alors comme une extrapolation de ce schéma pour le cas où il y a un nombre infini d'individus ou une répétition infinie du procès de formation des ensembles.

Il va de soi que le point de vue de Ramsey n'est rien moins que constructiviste, à moins qu'on n'accepte des constructions d'un esprit infini. Russell, dans la seconde édition des *Principia*, a pris le parti moins métaphysique de se restreindre aux fonctions de vérité qui peuvent être effectivement construites. De cette façon, on est de nouveau conduit à la théorie des ordres, qui apparaît pourtant maintenant sous un jour nouveau, à savoir comme une méthode pour construire des fonctions de vérité de propositions atomiques de plus en plus compliquées. Mais cette procédure semble présupposer l'arithmétique sous une forme ou une autre (voir le paragraphe suivant).

Quant à la question de savoir jusqu'à quel point les mathématiques peuvent être édifiées sur cette base (sans rien assumer des données — c'est-à-dire des prédicats primitifs et des individus — sinon, autant qu'il est nécessaire, l'axiome d'infinité), il est clair qu'on ne peut obtenir la théorie des nombres réels dans sa forme actuelle[37]. Pour ce qui est de la théorie des entiers, la seconde édition des *Principia* soutient qu'il est possible de l'obtenir. La difficulté à surmonter est que dans la définition des entiers comme « les cardinaux qui appartiennent à toute classe contenant 0, et contenant $x + 1$ si elle contient x », l'expression « toute classe » doit se référer à un ordre donné. Ainsi on obtient des entiers d'ordres différents, et l'induction complète ne peut être

* En français dans le texte.

36. Il est bien entendu permis, comme toujours, que les x_i soient identiques les uns aux autres, en partie ou totalement.

37. Quant à la question de savoir jusqu'où il est possible d'édifier la théorie des nombres réels en présupposant les entiers, cf. Hermann Weyl, *Das Kontinuum*, réimpression, 1932.

appliquée aux entiers d'ordre n que pour les propriétés d'ordre n; alors qu'il arrive fréquemment que la notion d'entier elle-même figure dans la propriété à laquelle l'induction est appliquée. Pourtant, cette notion est d'ordre $n+1$ pour les entiers d'ordre n. Or, dans l'appendice B de la seconde édition des *Principia*, une démonstration est offerte que les entiers de n'importe quel ordre supérieur à 5 sont les mêmes que ceux d'ordre 5, ce qui réglerait bien entendu toutes les difficultés. La démonstration pourtant, telle qu'elle se présente, n'est certainement pas concluante. Dans la démonstration du lemme principal *89. 16, qui énonce que tout sous-ensemble α (d'ordre arbitrairement élevé) [38] d'une classe inductive β d'ordre 3 est lui-même une classe inductive d'ordre 3, l'induction est appliquée à une propriété de β mettant en jeu α [à savoir $\alpha - \beta \neq \Lambda$, ce qui pourtant devrait s'écrire $\alpha - \beta \sim \in \text{Induct}_2$ parce que (3) est de toute évidence faux]. Cette propriété est pourtant d'un ordre >3 si α est d'un ordre >3. Aussi la question de savoir si (ou jusqu'à quel point) la théorie des entiers peut être obtenue sur la base de la hiérarchie ramifiée doit être considérée comme non-résolue pour l'heure. Il est à noter, pourtant, que, même au cas où la question aurait une réponse positive, le problème de savoir si l'arithmétique procède de la logique, n'en serait pas plus avancé, si on définit (comme dans la seconde édition des *Principia*) les fonctions propositionnelles comme des combinaisons (de quantificateurs, de connecteurs propositionnels, etc.) finies (bien que d'une complexité arbitraire), parce que la notion de finitude est dès lors à présupposer — fait qui n'est dissimulé qu'en prenant comme termes primitifs du formalisme des notions aussi compliquées que « fonctions propositionnelles d'ordre n » sous une forme non analysée, et en ne donnant leur définition qu'en langage commun. Peut-être peut-on répliquer que dans les *Principia* la notion de fonction propositionnelle d'ordre n n'est ni considérée comme primitive, ni définie dans les termes d'une combinaison finie, mais que les quantificateurs se référant aux fonctions propositionnelles d'ordre n (ce qui est tout ce dont on a besoin) sont plutôt définis comme certaines conjonctions et disjonctions infinies. Mais on peut alors demander : pourquoi ne définit-on pas les entiers par la disjonction infinie : $x = 0 \vee x = 0 + 1 \vee x = 0 + 1 + 1 \vee \ldots$ *ad infinitum*, s'épargnant de cette manière tous les ennuis liés à la notion d'inductivité. Toute cette objection n'aurait pas de raison d'être si on entendait par fonction propositionnelle d'ordre n une fonction propositionnelle « qui peut être obtenue à partir des fonctions de vérité de propositions atomiques ne présupposant pour leur définition aucune totalité sinon celles des fonctions propositionnelles d'ordre $< n$ et d'individus »; cette notion, pourtant, manque quelque peu de rigueur.

La théorie des ordres se montre plus fructueuse si on la considère d'un point de vue purement mathématique, indépendamment de la question philosophique de savoir si les définitions imprédicatives sont recevables. Si on la

38. Que la variable α soit destinée à être d'ordre indéterminé est montré par les applications ultérieures de *89. 17, et par la note à *89. 17. L'application principale se trouve à la ligne (2) de la démonstration de *89 24, où on a besoin du lemme examiné pour des α d'ordre arbitrairement élevé.

conçoit de cette façon, c'est-à-dire comme une théorie édifiée à l'intérieur du cadre des mathématiques ordinaires, où les définitions imprédicatives sont reçues, il n'y a aucune objection à l'étendre à des ordres transfinis arbitrairement élevés. Même si on rejette les définitions imprédicatives, il n'y aurait à mon avis aucune objection à l'étendre aux ordinaux transfinis qui peuvent être construits à l'intérieur du cadre des ordres finis. La théorie en elle-même semble demander une telle extension puisque elle conduit automatiquement à considérer des fonctions dans la définition desquelles on se réfère à toutes les fonctions d'ordres finis, et qui seraient des fonctions d'ordre ω. Si on admet les ordres transfinis, on peut démontrer un axiome de réductibilité. Cela n'est pourtant d'aucun secours au dessein premier de la théorie, parce que l'ordinal α — tel que toute fonction propositionnelle est équivalente en extension à une fonction d'ordre α — est si élevé qu'il présuppose des totalités imprédicatives. Néanmoins, on peut mener à bien tant de choses de cette façon-là que toutes les imprédicativités sont réduites à une seule espèce particulière, à savoir l'existence de certains grands nombres ordinaux (ou ensembles bien ordonnés) et la validité du raisonnement récursif pour eux. En particulier, l'existence d'un ensemble bien-ordonné, d'ordre ω_1, est déjà suffisante pour la théorie des nombres réels. De plus, ce théorème transfini de réductibilité permet de démontrer la consistance de l'axiome de choix, de l'hypothèse du continu de Cantor (qui énonce qu'il n'existe aucun nombre cardinal entre la puissance d'un ensemble arbitraire quelconque et la puissance de l'ensemble de ses sous-ensembles) avec les axiomes de la théorie des ensembles aussi bien qu'avec ceux des *Principia*.

J'en viens maintenant d'une façon un peu plus détaillée à la théorie des types simples qui figure dans les *Principia* combinée avec la théorie des ordres; cette dernière est pourtant (comme on en a fait ci-dessus la remarque) tout à fait indépendante de la première, étant donné que les types mélangés ne contredisent évidemment en aucune sorte le principe du cercle vicieux. En conséquence, Russell fonde aussi la théorie des types simples sur des raisons entièrement différentes. La raison alléguée (en plus de son « accord avec le sens commun ») ressemble beaucoup à celle de Frege, qui, dans son système, avait déjà assumé la théorie des types simples pour les fonctions, mais n'avait pas réussi à éviter les paradoxes, parce qu'il opérait avec des classes (ou plutôt des fonctions en extension) sans aucune restriction. Cette raison est que (en raison des variables qu'elle contient) une fonction propositionnelle est quelque chose d'ambigu (ou, comme le dit Frege, de non-saturé, réclamant un supplément) et ne peut par conséquent figurer dans une proposition douée de sens que d'une façon telle que cette ambiguïté soit éliminée (par exemple, en substituant une constante pour la variable, ou en lui appliquant une quantification). Les conséquences en sont qu'une fonction ne peut remplacer un individu dans une proposition, parce que celui-ci n'a pas d'ambiguïté qui doive être levée, et que les fonctions dont les arguments (c'est-à-dire les ambiguïtés) sont de différentes sortes ne peuvent pas se remplacer l'une l'autre; ce qui est l'essence même de la théorie des types simples. Si on prend un point de vue plus nominaliste (tel celui que suggèrent la seconde édition des *Principia* et *Meaning and Truth*), on devra, dans les considérations précédentes, remplacer « proposition » par « énoncé » (*sentence*). Mais dans les deux cas, cet argument appartient de toute évidence au même ordre d'idées que la théorie « pas-de-classe », puisqu'il voit dans les notions (ou fonctions propositionnelles) quelque chose que l'on construit à partir de propositions ou d'énoncés, en laissant indéterminé un ou plusieurs de leurs constituants. Les fonctions propositionnelles, en ce sens, sont, pour ainsi dire, des « fragments » de propositions, qui n'ont aucun sens en eux-mêmes, et n'en acquièrent un que dans la mesure où on peut les utiliser pour former des propositions en en combinant plusieurs, ce qui n'est possible que s'ils « s'ajustent » (*fit together*), c'est-à-dire, s'ils sont de type approprié. Mais on devait remarquer que la théorie des types simples (au contraire du principe du cercle vicieux), ne peut pas découler au sens strict du point de vue constructiviste, parce qu'on pouvait construire notions et classes d'une autre façon, et par exemple, de la manière indiquée p. 100, où les mélanges de types sont possibles. Si, d'un autre côté, on considère les concepts comme des objets réels, la théorie des types simples n'est pas très vraisemblable, étant donné que ce qu'on pourrait supposer être un concept, (comme, par exemple, la « transitivité ou le nombre deux), paraît bien être quelque chose, derrière toutes ses diverses « réalisations » aux différents niveaux, et par conséquent ne pas se conformer dans son existence à la théorie des types. Néanmoins, il semble qu'il y ait quelque vérité derrière cette idée que le même concept se réalise à des niveaux divers, et on pourrait, par conséquent, attendre de la théorie des types simples qu'elle se montre au moins utile ou indispensable comme marchepied vers un système plus satisfaisant, et c'est ainsi que Quine l'a déjà utilisée[39]. « L'ambiguïté de type » (*typical ambiguity*) de Russell est également un pas dans cette direction. Étant donné pourtant que cela ne fait qu'ajouter à la théorie des types quelques conventions symboliques simplificatrices, cela ne va pas *de facto* au-delà de cette théorie.

On doit remarquer que la théorie des types apporte pour résoudre les paradoxes une nouvelle idée, particulièrement appropriée à leur forme en compréhension. Elle consiste à attribuer les paradoxes non pas à l'axiome que toute fonction propositionnelle définit un concept ou une classe, mais à l'assomption que tout concept donne une proposition douée de sens s'il est appliqué à tout objet ou pluralité d'objets arbitraires comme à ses arguments. L'objection évidente, que tout concept peut être étendu à tous les arguments en en définissant un autre qui donne une proposition fausse chaque fois que le premier est vide de sens, peut être aisément repoussée en montrant que le concept « applicable sans non-sens » (*meaningfully applicable*) n'a pas besoin d'être toujours lui-même « applicable sans non-sens ».

La théorie des types simples (dans son interprétation réaliste) peut être considérée comme la mise en œuvre de ce schéma, fondé, pourtant, sur

39. *Loc. cit.*, cf. note 13.

l'assomption supplémentaire que voici, concernant le « doué de sens » (*meaningfulness*) : « Chaque fois qu'un objet x peut remplacer un autre objet y dans une proposition douée de sens, il peut faire de même dans toute proposition douée de sens »[40]. Il s'ensuit bien sûr que les objets sont répartis dans des domaines de signifiance qui s'excluent mutuellement et sont composés chacun des objets capables de se remplacer les uns les autres; et que chaque concept n'a par conséquent de signification que pour les arguments appartenant à un de ces domaines, c'est-à-dire pour une part infiniment petite de tous les objets. Ce qui rend pourtant particulièrement suspect le principe précédent est que le seul fait de l'assumer rend impossible de le formuler comme une proposition douée de sens[41] parce que x et y doivent être alors cantonnés dans des domaines définis de signifiance qui sont ou bien identiques ou bien différents : dans les deux cas, l'assertion n'exprime pas le principe, pas même en partie. Il s'ensuit également que le fait qu'un objet x est (ou n'est pas) d'un type donné ne peut pas être exprimé par une proposition douée de sens.

Il n'est pas impossible qu'on puisse mettre en œuvre l'idée de domaines limités de signifiance en se passant du principe restrictif mentionné ci-dessus. Il pourrait même advenir qu'il soit possible d'assumer que tout concept a partout une signification, sinon en certains « points singuliers » (*singular points*) ou « points limites » (*limiting points*), de telle sorte que les paradoxes apparaîtraient comme quelque chose d'analogue à la division par zéro. Un tel système serait satisfaisant au plus haut point sous le rapport suivant : nos intuitions logiques demeureraient correctes, à quelques corrections mineures près, c'est-à-dire qu'elles seraient alors considérées comme donnant un tableau correct pour l'essentiel, quelque peu « flou » (*blurred*), seulement, de l'état de choses réel. Malheureusement, les tentatives faites dans cette direction ont échoué jusqu'à maintenant[42]; d'un autre côté, l'impossibilité de ce système n'a pas été démontrée non plus, malgré les théorèmes d'inconsistance forte de Kleene et Rosser[43].

En conclusion, je veux dire quelques mots sur la question de savoir si (et en quel sens) on peut considérer les axiomes des *Principia* comme analytiques. En ce qui concerne ce problème, on doit remarquer que l'analytique peut être pris en deux sens. Premièrement, cela peut vouloir dire, c'est le sens purement formel, que les termes occurrents peuvent être définis (ou d'une manière explicite, ou par des règles permettant de les éliminer des énoncés qui les contiennent) de telle sorte que les axiomes et les théorèmes

40. Russell formule dans les *Principia*, vol. 1, p. 95, un principe quelque peu différent, qui a le même résultat.

41. Cette objection ne vaut pas pour l'interprétation symbolique de la théorie des types, dont on a parlé p. 103, parce qu'on n'a pas d'objets, mais seulement des symboles, de type différent.

42. Un système formel de ce modèle est celui de Church (cf. « A Set of Postulates for the Foundations of Logic », *Annals of Mathematic*, vol. 33 (1932), p. 346, et vol. 34 (1933), p. 839), où, néanmoins, l'idée de base est exprimée par l'assertion quelque peu trompeuse que la loi du tiers exclu est abandonnée Néanmoins, on a démontré que ce système était inconsistant. Voir note 43.

43. Cf. S. C. Kleene et J. B. Rosser, « The Inconsistency of Certain Formal Logics », *Annals of Math.*, vol. 36 (1935), p. 630.

deviennent des cas particuliers de la loi d'identité, et les propositions réfutables des négations de cette loi. En ce sens, on peut démontrer que même la théorie des entiers est non analytique, à condition qu'on exige des règles d'élimination, qu'elles permettent effectivement dans chaque cas de mener l'élimination à son terme en un nombre fini d'étapes [44]. Si on laisse cette condition de côté en admettant, par exemple, des énoncés de longueur infinie (et non-dénombrable) comme étapes intermédiaires du procès de réduction, tous les axiomes des *Principia* (y compris les axiomes de choix, d'infinité et de réductibilité) peuvent être démontrés analytiques pour certaines interprétations (en raisonnant d'une manière analogue à celle qui est mentionnée p. 100) [45]. Mais cette remarque est d'une valeur discutable, parce que l'ensemble des mathématiques en tant qu'appliquées à des énoncés de longueur infinie doit être présupposé pour arriver à démontrer ce caractère analytique; par exemple, l'axiome de choix ne peut être démontré analytique que si on assume qu'il est vrai.

En un second sens, une proposition est nommée analytique si elle reste valide « en raison du sens des concepts qui apparaissent en elle », là où ce sens est peut-être indéfinissable (c'est-à-dire irréductible à rien de plus fondamental) [46]. Il pourrait sembler que tous les axiomes des *Principia* dans la première édition, (à l'exception de l'axiome d'infinité) sont, en ce sens, analytiques pour certaines interprétations des termes primitifs, c'est-à-dire si le terme de « fonction prédicative » est remplacé par « classe » (au sens extensionnel) ou (en laissant de côté l'axiome de choix) par « concept », étant donné que rien ne peut mieux exprimer le sens du terme de « classe » que l'axiome des classes (cf. p. 96) et l'axiome de choix, et que, d'un autre côté, le sens du terme de « concept » semble impliquer que toute fonction propositionnelle définit un concept [47]. La difficulté est seulement que nous n'avons pas une perception assez claire des concepts de « concept » et de « classe », ainsi que le montrent les paradoxes. Devant cette situation, Russell prit le parti de considérer comme non-existants aussi bien les classes que les

44. Parce que cela impliquerait l'existence d'une procédure de décision pour toutes les propositions arithmétiques. Cf. A. M. Turing, *Proc. Lond. Math. Soc.* vol. 42 (1936), p. 230.

45. Cf. également F. P. Ramsey, *loc. cit.* (note 21) où, néanmoins, on ne peut obtenir l'axiome d'infinité, parce qu'on l'interprète comme faisant référence aux individus du monde.

46. On pourrait peut-être distinguer les deux significations du terme *analytique*, en tautologique et analytique.

47. Cette conception ne contredit pas l'opinion défendue plus haut, selon laquelle la mathématique est fondée sur des axiomes au contenu réel, parce que l'existence même du concept, par exemple de « classe », constitue déjà un tel axiome; en effet, si on définissait par exemple « classe » et « $\in$ » comme « les concepts satisfaisant les axiomes », on se trouverait incapable de démontrer leur existence. « Concept » pourrait être défini peut-être en termes de « proposition » (Cf. p. 103 bien que je ne pense pas que ce serait une procédure naturelle); mais il faudra alors assumer certains axiomes sur les propositions que seule légitimera une référence au sens non-défini de ce terme. On doit remarquer que cette conception de l'analytique rend de nouveau possible de réduire peut-être toute proposition mathématique à un cas particulier de $a = a$, à la condition que la réduction ne soit pas effectuée en vertu de la définition des termes occurrents, mais en vertu de leur sens, ce qui ne peut jamais être complètement exprimé dans un ensemble de règles formelles.

concepts, et de les remplacer par des constructions qui sont notre fait. On ne peut nier que cette manière de procéder n'ait conduit à des idées intéressantes et à des résultats précieux, même pour qui prend le point de vue opposé. Dans l'ensemble, pourtant, cela a seulement abouti à ne laisser subsister que des fragments de la logique mathématique, à moins de réintroduire ce qu'on condamnait, sous la forme de propositions infinies, ou encore d'axiomes comme l'axiome de réductibilité, qui (lorsqu'est donnée une infinité d'individus) peut être démontré faux, à moins qu'on n'assume ou bien l'existence des classes ou bien une infinité de « *qualitates occultae* ». Cela semble indiquer qu'il vaut mieux prendre un autre parti plus conservateur, celui par exemple de clarifier le sens des termes de « classe » et de « concept », et d'édifier une théorie consistante des classes et des concepts, considérés comme des entités objectivement existantes. C'est là le parti qu'a pris la logique mathématique dans son développement actuel; et que Russell lui-même a été forcé d'adopter dans les parties les plus constructives de son travail. Au premier rang des tentatives faites dans cette direction (dont certaines ont été citées dans ce texte), il faut compter la théorie simple des types (qui est le système de la première édition des *Principia* dans une interprétation appropriée) et la théorie axiomatique des ensembles, qui toutes les deux ont réussi au moins jusqu'au point de nous permettre de dériver les mathématiques modernes en évitant tous les paradoxes connus. De nombreux symptômes, pourtant, ne montrent que trop clairement que les concepts primitifs ont besoin d'être élucidés plus avant.

Il paraît raisonnable de penser que c'est en raison de cette compréhension incomplète des fondements que la logique mathématique est jusqu'à présent restée si en deçà des hautes espérances de Peano et d'autres qui (conformément aux assurances de Leibniz) avaient attendu d'elle qu'elle facilite autant les mathématiques théoriques que le système décimal des nombres a facilité les calculs numériques. En effet, comment peut-on espérer résoudre d'une manière systématique les problèmes mathématiques par une simple analyse des concepts qui y apparaissent, si notre analyse jusqu'à maintenant ne suffit pas même à établir les axiomes ? Mais il n'est pas besoin d'abandonner tout espoir. Leibniz, dans ses écrits sur la *Characteristica universalis*, n'avait pas parlé d'un projet utopique; si nous devons le croire, il avait donné un développement étendu à ce calcul du raisonnement, mais remettait sa publication au jour où la graine pourrait tomber sur un sol fertile [48]. Il n'hésita pas [49] à donner une estimation du temps qui serait nécessaire à un petit nombre choisi de savants pour développer son calcul jusqu'au point où « l'humanité aurait en sa possession une nouvelle sorte d'instrument augmentant les pouvoirs de la raison au-delà de ce qu'aucun instrument optique

48. *Die philosophischen Schriften von G. W. Leibniz*, herausgegeben von C. J. Gerhardt, vol. 7 (1890) p. 12. Cf. également G. Vacca, « La Logica di Leibniz » (section VII) *Riv. di Mat.* vol. 8 (1902-06), p. 72, et la préface dans le premier volume de la première série de *Leibniz's Sämtliche Briefe und Schriften, herausgegeben von der Preussischen Akademie der Wissenchaften* (depuis 1923).

49. Leibniz, *Philosophische Schriften* (ed. Gerhardt), vol. 7, p. 187.

n'avait jamais ajouté au pouvoir de la vue ». Le temps qu'il indique est de cinq ans, et il prétend que sa méthode n'est pas plus difficile à apprendre que les mathématiques ou la philosophie de son temps. De plus, il affirma à plusieurs reprises que sa théorie, en dépit de l'état encore rudimentaire où il l'avait lui-même conduite, était responsable de toutes ses découvertes mathématiques ; ce que Poincaré lui-même, on est en droit de l'espérer, accepterait pour une preuve suffisante de sa fécondité [50].

The School of Mathematics
The Institute for Advanced Study
Princeton, New Jersey.

50. Je désire exprimer mes remerciements au professeur Alonzo Church, de l'Université de Princeton, pour m'avoir aidé à trouver, en nombre d'endroits, les expressions anglaises correctes.

Jean Ladrière

Le théorème de Löwenheim-Skolem

L'une des raisons pour lesquelles on s'est efforcé de formaliser les mathématiques est que la notion d'infini, essentielle pour la pensée mathématique, est loin de présenter la même clarté et les mêmes garanties que les concepts propres aux mathématiques finies. On espérait, grâce aux ressources du langage formel, obtenir un contrôle indirect de la notion d'infini en représentant les raisonnements infinitistes dans des systèmes d'expression accessibles à des raisonnements finitistes, et ramener ainsi le domaine infini dans l'aire de sécurité de la pensée finie. L'examen attentif des langages formels a montré, de diverses manières, qu'il y a une sorte d'incapacité congénitale du formalisme à fournir une représentation adéquate des spéculations infinitistes. Le théorème de Löwenheim-Skolem fait apparaître un des aspects de cette inadéquation constitutive des systèmes formels. Pour en faire voir toute la portée, il faut le replacer dans le contexte général de l'étude des rapports entre les systèmes formels et leurs modèles.

*

Un *langage* peut être considéré comme un ensemble de règles permettant de construire, à partir de symboles élémentaires donnés, des expressions de complexité croissante et opérant une répartition de ces expressions en catégories caractérisées par leurs propriétés syntaxiques (c'est-à-dire par les modalités de leur usage dans la construction des expressions). Parmi les catégories syntaxiques d'un langage, il en est une qui occupe une situation privilégiée parce que, envisagée du point de vue sémantique, elle est faite d'expressions qui présentent un caractère de fermeture minimale : c'est celle des *propositions*. Une proposition exprime la plus petite unité de sens que l'on peut considérer comme fermée sur elle-même : elle peut être affectée par les prédicats sémantiques que l'on désigne communément par les termes « vrai » et « faux ». Un langage est dit *formalisé* lorsqu'il se présente sous forme de règles énoncées complètement, sans ambiguïté, et répondant à des critères précis d'effectivité. La notion d'effectivité peut être représentée elle-même sous forme de manipulations formelles, mais on peut dire, intuitivement, qu'elle correspond à des opérations qui se déroulent selon un schéma canonique et peuvent s'achever en un temps fini, du type de celles que pourrait réaliser une machine. Ainsi il faut pouvoir reconnaître de façon effective si un symbole donné fait ou non partie des symboles du langage étudié, si telle expression est bien une expression de ce langage, à quelle catégorie syntaxique elle appartient, comment elle a été construite, etc.

Une *théorie* est une classe particulière de propositions d'un langage, considérées comme vraies. (Un même langage peut évidemment contenir plusieurs théories distinctes, et même éventuellement une infinité de théories.) Une théorie peut être dite *formalisée* lorsque le critère d'appartenance qui la caractérise peut être décrit au moyen de règles complètes, dépourvues d'ambiguïté et effectives. Bien entendu, il n'est possible de formaliser une théorie que dans le cadre d'un langage lui-même formalisé. Pratiquement, on a été amené, en vue de formaliser les théories que l'on s'est proposé (jusqu'ici) d'étudier de façon stricte, à construire des langages artificiels, relativement pauvres mais en principe entièrement contrôlables. On s'est d'abord préoccupé de construire des langages logiques purs, c'est-à-dire des langages permettant de représenter, en quelque sorte à vide, les procédés connus de raisonnement (tels qu'ils sont utilisés, par exemple, en mathématiques). Nous aurons à nous occuper dans ce qui suit d'un tel langage, celui de la logique des prédicats du premier ordre.

Il y a deux manières de formaliser une théorie, l'une qui est en quelque sorte extrinsèque et l'autre qui est purement intrinsèque. La méthode extrinsèque consiste à décrire la classe des propositions formant la théorie en suivant pas à pas le processus de construction de ces propositions. Pratiquement, on peut fournir une telle description en se référant à un certain domaine d'objets, supposé donné, muni d'une structure, c'est-à-dire d'une certaine collection de relations. La méthode intrinsèque consiste à isoler, au sein de la théorie, une classe particulière de propositions, appelées axiomes, que l'on peut énumérer effectivement, et à fournir des *règles* au moyen desquelles on peut obtenir toutes les propositions de la théorie au moyen de celles-là. Une théorie présentée sous cette forme est ordinairement appelée un *système formel*. La première méthode peut être baptisée *méthode sémantique*, la seconde *méthode syntaxique*. Un des problèmes importants que pose l'étude des formalismes est de comparer ces deux modes de caractérisation : une théorie étant décrite sémantiquement, on peut se demander comment l'axiomatiser, c'est-à-dire comment la décrire syntaxiquement — et inversement, une théorie étant donnée sous forme axiomatique, on peut se proposer d'en étudier la sémantique.

Illustrons ceci par le cas de la *logique des prédicats du premier ordre*, que concerne précisément le théorème de Löwenheim-Skolem. Nous désignerons dans la suite cette logique par le sigle L.P. Cette théorie a pour but de caractériser les formes de raisonnement que l'on peut effectuer au moyen des opérations élémentaires portant sur des propositions (négation, conjonction, disjonction, implication, équivalence) et des opérations de quantification portant sur les prédicats de premier niveau (prédicats d'individus).

Le langage dans lequel est formulée la théorie LP est extrêmement simple. Il comporte une liste infinie de symboles représentant des *variables individuelles* (variables pouvant être remplacées par des noms d'individus), une autre liste infinie de symboles représentant des prédicats d'individus, les symboles désignant les opérations logiques élémentaires, les symboles de quantification, et des symboles séparatifs (par exemple des parenthèses). Les prédicats peuvent s'appliquer à un ou plusieurs arguments : ils correspondent donc soit à des propriétés d'individus soit à des relations entre deux ou plusieurs individus. En ce qui concerne les opérations logiques élémentaires, on peut se limiter, par exemple, à la négation et à l'implication, car les autres opérations peuvent être définies au moyen de celles-là. Des règles précisent quels sont les groupes de symboles qui peuvent être considérés comme des propositions. Une expression du type $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, où P est un symbole désignant un prédicat à n arguments et x_1, x_2, ..., x_n sont des symboles désignant des variables individuelles, est une proposition. (Cette expression signifie : *Le prédicat P est vérifié du n-uple d'individus* $x_1, x_2, ..., x_n$. Ou encore : *Les individus* $x_1, x_2, ..., x_n$ *ont entre eux la relation exprimée par le prédicat P*.) Si A est une proposition, $\sim A$ (*non-A*) est une proposition. Si A et B sont des propositions, $A \supset B$ (*A implique B*) est une proposition. Si $A(x)$ est une proposition contenant la variable individuelle x, $(x)A(x)$ (*pour tout x, la proposition* $A(x)$ *est valable, tout x a la propriété exprimée par A*) et $(Ex)A(x)$ (*il y a un x au moins pour lequel la proposition* $A(x)$ *est valable, il y a un x qui possède la propriété exprimée par A*) sont des propositions. (Dans l'expression $A(x)$, A peut désigner un prédicat simple, mais peut être aussi une expression complexe, contenant d'autres variables que x et jouant le rôle d'un prédicat complexe à l'égard de x.)

La théorie LP peut être caractérisée sous forme syntaxique, c'est-à-dire présentée sous la forme d'un système axiomatique d'une manière assez simple. Les axiomes sont décrits au moyen de quelques schémas de construction [1]. Ils constituent une classe infinie de propositions, contenant toutes les propositions formées selon ces schémas. Les règles de déduction sont au nombre de deux. L'une est le *modus ponens* : *Si* $A \supset B$ *et A sont des théorèmes* (c'est-à-dire soit des axiomes soit des propositions déjà dérivées des axiomes), *B est aussi un théorème*. L'autre est la règle de la généralisation : *Si* $A(x)$ *est un théorème*, $(x)A(x)$ *est aussi un théorème* [2]. La théorie LP

1. Dans son *Introduction to mathematical logic*, par exemple, Church utilise cinq schémas d'axiomes. Trois d'entre eux correspondent à la logique des propositions et expriment certaines propriétés des opérations de négation et d'implication. Les deux autres correspondent à certaines propriétés du quantificateur universel (*Pour tout x*...), en liaison avec l'opération d'implication. Il y a moyen de présenter les axiomes de façon directe, à condition d'utiliser une règle appropriée de substitution. Mais nous n'avons pas à nous embarrasser ici de ces détails techniques.

2. Remarquons qu'il n'est pas nécessaire de prévoir une règle pour le maniement du quantificateur existentiel (*Il y a un x tel que*...) car celui-ci peut être défini au moyen du quantificateur universel : $(Ex)A(x)$ est équivalent par définition à $\sim (x) \sim A(x)$. Les deux règles mentionnées ici sont celles de

est formée par l'ensemble des propositions que l'on peut déduire de la classe des axiomes au moyen de ces deux règles.

Mais la théorie LP peut aussi être caractérisée d'une manière sémantique, au moyen de ce qu'on appelle une *interprétation.* Soit L le langage dans lequel est formulée la théorie LP. Une interprétation est un procédé qui permet d'associer à chaque proposition de L soit la propriété « vrai » soit la propriété « faux ». Pour construire une interprétation, on se donne d'abord un certain domaine D d'objets dont les membres seront considérés comme des individus. On peut prendre par exemple pour D l'ensemble des nombres entiers. Il est possible alors d'associer aux propositions de L des énoncés relatifs au domaine D. Concrètement, une telle association sera établie au moyen de deux applications, c'est-à-dire de deux correspondances fonctionnelles (associant à un objet de l'ensemble de départ un objet et un seul de l'ensemble d'arrivée).

Appelons la première application *assignation individuelle* : une telle application associe à chaque variable individuelle de L un objet (et un seul) du domaine D. Appelons la seconde application *assignation prédicative* : une telle application associe à chaque variable prédicative à n arguments de L une relation (et une seule) définie sur D, c'est-à-dire un certain ensemble de n-uples formés d'objets de D. (Ainsi, si on prend pour D l'ensemble des entiers, on pourra associer à un prédicat P à deux arguments de L une relation binaire entre entiers, par exemple « double de ». Une telle relation peut être considérée comme l'ensemble des paires d'entiers dont le premier élément est le double du second : (2, 1), (4, 2), (6, 3), etc.)

Une assignation individuelle et une assignation prédicative étant données, à toute proposition élémentaire de L se trouve *ipso facto* associé un énoncé relatif au domaine D. (Soit par exemple la proposition $P(x_1, x_2)$. Si l'assignation individuelle choisie fait correspondre à x_1 l'objet *4* et à x_2 l'objet *2*, et si l'assignation prédicative choisie fait correspondre au prédicat P la relation « double de », notre proposition sera associée à l'énoncé « Quatre est le double de deux ».) La connaissance du domaine D nous permet de déterminer si un énoncé ainsi associé à une proposition de L est vrai ou faux.

Une interprétation du langage sera définie par les règles suivantes, qui suivent les règles de formation des propositions de L.

a) Si une proposition est de forme $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, elle est *vraie* ou *fausse* pour une double assignation (une assignation individuelle jointe à une assignation prédicative) donnée, suivant que cette double assignation lui associe un énoncé vrai ou faux. (Ainsi, dans notre exemple, la proposition $P(x_1, x_2)$ devait être déclarée *vraie*).

b) Une proposition de forme $\sim A$ est *vraie* ou *fausse* suivant que la proposition A est *fausse* ou *vraie.*

---

l'un des systèmes décrits par Church sous le titre *Calcul fonctionnel du 1er ordre* dans l'ouvrage mentionné plus haut. Il existe d'autres formulations de la théorie LP, mais ces variantes n'ont pas d'intérêt pour notre propos.

c) Une proposition de forme $A \supset B$ est *vraie*, sauf si la proposition A est *vraie* et la proposition B *fausse* (auquel cas elle est *fausse*).

d) Une proposition de forme $(x)A(x)$ est *vraie* pour une assignation prédicative donnée si, pour cette assignation, la proposition $A(x)$ est *vraie* quelle que soit l'assignation individuelle choisie (c'est-à-dire quel que soit l'objet de D associé à la variable x). Elle est *fausse*, si, pour une assignation individuelle au moins, la proposition $A(x)$ est *fausse*. (Ainsi, D étant l'ensemble des entiers, si on associe à A la propriété « être un nombre premier », la proposition $(x)A(x)$ est *fausse*, car, pour une assignation individuelle qui associe à x le nombre *10* par exemple, la proposition $A(x)$, associée à l'énoncé faux « Dix est un nombre premier », doit être déclarée *fausse*.)

Une proposition est dite *valide dans un domaine donné* si elle est *vraie* pour toutes les assignations possibles (à la fois individuelles et prédicatives) relativement à ce domaine, autrement dit si elle est vraie dans toutes les interprétations relatives à ce domaine. Elle est dite *exemplifiable dans un domaine donné* si elle est *vraie* pour une assignation individuelle et une assignation prédicative au moins relativement à ce domaine, autrement dit si elle est vraie dans une interprétation au moins relative à ce domaine. Elle est dite *valide* si elle est valide dans tous les domaines possibles et elle est dite *exemplifiable* si elle est exemplifiable dans un domaine au moins.

Étant donné une classe de propositions, on dit qu'elle *admet le domaine D comme modèle* (pour une interprétation donnée) si toutes les propositions de cette classe sont simultanément exemplifiables dans ce domaine, c'est-à-dire si, pour l'interprétation en question, elles deviennent toutes *vraies*. Comme une théorie constitue une classe de propositions, une théorie admet un modèle s'il existe un domaine dans lequel toutes les propositions de cette théorie sont simultanément exemplifiable. Fournir un modèle d'une théorie déterminée, c'est en somme se donner l'image de cette théorie sous la forme d'une certaine structure (le domaine muni des relations associées aux prédicats de la théorie), autrement dit c'est fournir une sorte de réalisation concrète de la théorie.

Ces notions étant fixées, nous pouvons examiner comment se présentent les relations entre la représentation sémantique et la représentation syntaxique de LP. Au point de vue sémantique, la théorie LP sera caractérisée comme l'ensemble des propositions de L qui sont valides, c'est-à-dire qui sont vraies pour toutes les interprétations possibles relativement à tous les domaines possibles. C'est là une manière de dire que les propositions de LP sont purement formelles : elles représentent des situations qui peuvent se réaliser dans tous les univers possibles. Au point de vue syntaxique, la théorie LP est caractérisée, comme on l'a vu plus haut, par un ensemble d'axiomes et deux règles.

La première question qui se pose est de savoir si la représentation syntaxique d'une théorie correspond de façon adéquate à sa représentation sémantique. Cette question a reçu une réponse affirmative, sous la forme de deux métathéorèmes, dont le premier peut être appelé *théorème de validité* et dont le second est le célèbre *théorème d'adéquation* dû à Gödel. Le théorème de validité s'énonce comme suit : *Tout théorème de LP est une proposition valide de L.* La démonstration de ce métathéorème est fort simple. Elle consiste à montrer que les axiomes de LP sont des propositions valides, et à montrer ensuite que les règles de déduction de LP conservent la validité (c'est-à-dire fournissent des conclusions valides lorsque leurs prémisses le sont); aucune de ces tâches ne présente de difficulté. Le théorème d'adéquation s'énonce comme suit : *Toute proposition valide de L est un théorème de LP.* Ce métathéorème, dont la démonstration est beaucoup plus compliquée que celle du précédent, signifie que l'axiomatique de la logique des prédicats est formulée de telle sorte qu'elle épuise effectivement toutes les formes de raisonnement admissibles (moyennant une interprétation « naturelle » des opérations logiques élémentaires et des quantificateurs, contenue dans les règles énoncées plus haut).

Le théorème d'adéquation, tel qu'il vient d'être formulé, peut être considéré comme une conséquence d'un métathéorème qu'on pourrait appeler le *métathéorème de cohérence*, qui contient du reste l'essentiel du théorème d'adéquation. On dit qu'une classe K de propositions est *cohérente* lorsqu'il n'existe aucune proposition A telle que l'on puisse déduire de la classe K à la fois A et $\sim A$. (Une proposition est dite *déductible d'une classe K de propositions de L* s'il est possible de déduire cette proposition des axiomes de LP, enrichis des propositions de la classe K, au moyen des règles de déduction de LP.) Le métathéorème de cohérence s'énonce comme suit : *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une classe de propositions de L soit cohérente est qu'elle admette (au moins) un modèle.* Ce théorème comprend deux parties. La première partie — *Si une classe de propositions de L admet un modèle, elle est cohérente* — peut être établie très simplement. La deuxième partie — *Si une classe K de propositions de L est cohérente, elle admet un modèle* — ne peut être établie que moyennant un raisonnement complexe qui fait apparaître toute la portée du théorème d'adéquation.

La démonstration consiste évidemment à indiquer comment on peut construire un modèle pour la classe K de propositions considérée [3]. La difficulté principale que l'on doit surmonter est que la classe K est en général trop restreinte pour qu'on puisse en tirer des informations suffisantes pour la construction directe d'un modèle admissible. Il faudra donc commencer par l'étendre de façon convenable. De façon précise, il faudra prévoir une extension qui réponde à deux conditions : elle devra être *complète* (c'est-à-dire que toute proposition du langage L ou sa négation devra y figurer)

3. L'esquisse de démonstration donnée ici s'inspire de l'exposé donné par Church du théorème de cohérence dans *Introduction to mathematical logic.* Mais la démonstration de Church fait intervenir directement un domaine dénombrable. On a supposé ici que le domaine D est infini sans autre précision.

et elle devra comporter au moins une exemplification de chacune des propositions existentielles qu'elle contient. (Supposons par exemple que la classe K contienne l'existentielle (Ex)A(x). Notre extension devra contenir une proposition du genre $A(c)$ où c est un terme désignant un individu. La proposition $A(c)$ (*L'individu c possède la propriété A*) peut être considérée comme une exemplification de la proposition générale $(Ex)A(x)$ (*il y a un x qui possède la propriété A*).)

Pour réaliser la première condition, on élargit la classe K donnée en une *classe cohérente maximale*. Une classe cohérente maximale est une classe cohérente qui contient toutes les propositions de L compatibles avec elle (c'est-à-dire telles que leur appartenance à la classe en question ne rend pas celle-ci non-cohérente). Une classe cohérente maximale répond effectivement à la condition posée : si A est une proposition de L qui ne fait pas partie de cette classe, c'est qu'elle est incompatible avec elle — mais alors $\sim A$ est compatible avec elle (comme on peut le montrer par un raisonnement simple en se servant de certains théorèmes de LP) et donc en fait partie.

Il est possible d'ordonner les propositions de L, en rangeant d'abord les symboles de L dans un certain ordre et en déterminant, à partir de là, un ordre pour les propositions. (On peut aussi utiliser l'axiome du choix, dont il sera question plus loin.) La classe K étant donnée, il suffit de parcourir toutes les propositions de L, dans l'ordre où elles sont ainsi classées, et d'examiner, pour chacune d'elles, si elle est ou non compatible avec la classe K′ déjà obtenue au moment où on procède à cet examen. Si la réponse est affirmative, on ajoute cette proposition à la classe K′ et on passe à l'examen de la proposition suivante; sinon on reprend la classe K′ telle quelle et on passe à l'examen de la proposition suivante. On obtient ainsi une suite infinie de classes dont chacune contient la précédente. On prend alors l'union de toutes ces classes : c'est une classe K* définie par la condition qu'une proposition A fait partie de K* si et seulement si elle fait partie de l'une des classes de notre suite infinie. On montre sans peine que, si K est cohérente, K* est aussi cohérente. Et il résulte de la construction de K* que c'est une classe cohérente maximale.

Pour réaliser la deuxième condition, on doit enrichir la langue L en lui ajoutant des constantes individuelles. Une constante individuelle est une expression qui représente un individu déterminé (à la différence d'une variable individuelle, qui représente seulement la place possible d'un individu éventuel). Considérons une classe de propositions K qui contient une proposition existentielle (Ex)A(x). Nous ajoutons à L un nouveau symbole, c, qui joue le rôle d'une constante individuelle et nous étendons les règles de construction des propositions de telle sorte que c puisse servir d'argument à un prédicat. (Ainsi, si P est un prédicat à un argument, $P(c)$ sera une proposition, affirmant de l'individu c la propriété P.) Nous enrichissons la classe K de la proposition $A(c)$. En procédant de la même manière pour toutes les propositions existentielles de K, nous obtenons une nouvelle classe K′, qui contient K et qui répond à la condition posée : K′ contient, pour chaque existentielle, une exemplification correspondante. On montre facilement que, si la classe K est cohérente, la classe K′ est aussi cohérente.

Pour démontrer le théorème de cohérence, il faut réaliser ces deux conditions simultanément. Mais on ne peut arriver à ce résultat d'un seul coup; on doit passer par une suite infinie d'étapes, en suivant une sorte de parcours en zig-zags (où l'on saute alternativement d'une condition à l'autre). Soit K_0 une classe cohérente de propositions de L. Première étape : nous immergeons K_0 dans une classe cohérente maximale $K^\star{}_0$. Ainsi nous avons réalisé la première condition. Deuxième étape : nous enrichissons le langage L de façon à associer à toutes les propositions existentielles de $K^\star{}_0$ une exemplification. Nous obtenons ainsi un langage L_1 et une classe K_1 qui répond à notre seconde condition. Cette classe K_1 est cohérente. Mais, en général, elle ne répondra plus à la première condition relativement au langage L_1. Nous devrons donc agir avec K_1, relativement à L_1, comme nous avons agi avec K_0 relativement à L. Nous allons donc immerger K_1 dans une classe cohérente maximale $K^\star{}_0$. Puis nous allons enrichir le langage L_1 de façon à associer à toutes les propositions de $K^\star{}_1$ une exemplification. Nous obtenons ainsi un langage L_2 et une classe K_2 qui répond à notre seconde condition. Et ainsi de suite, indéfiniment. Il nous suffit maintenant de construire un langage L′ en prenant l'union des langages L, L_1, L_2, etc., et de construire une classe K′ en prenant l'union des classes $K^\star{}_0$, $K^\star{}_1$, etc. La classe K′ est cohérente relativement à L′ et elle répond à nos deux conditions : elle est complète et elle contient au moins une exemplification de toutes les propositions existentielles qui en font partie.

Nous pouvons maintenant construire un modèle pour la classe K′. Il suffit pour cela de faire choix d'un domaine infini D et de décrire une interprétation pour laquelle toutes les propositions de K′ sont *vraies* relativement à ce domaine. Nous pouvons prendre comme domaine D un ensemble infini quelconque. Pour définir une interprétation, nous devons faire choix d'une assignation individuelle et d'une assignation prédicative. Nous choisirons comme assignation individuelle une application qui fait correspondre à tout terme individuel de L′ (variable individuelle ou constante individuelle) un objet et un seul du domaine D, deux termes distincts étant associés à des objets distincts. (Ainsi un terme individuel de L′ a pour image un objet bien déterminé de D et tout objet de D ne peut être l'image que d'un terme individuel de L′ au plus.) Nous définirons d'autre part une assignation prédicative comme suit. Soit P une variable prédicative de L′ à n arguments. Nous lui associons une relation R à n objets, définie sur D, comme suit : la relation R existe ou n'existe pas entre les objets a_1, a_2, ..., a_n de D suivant que la proposition $P(t_1, t_2, ..., t_n)$, où $t_1, t_2, ..., t_n$ sont les termes individuels de L′ dont les images respectives (par l'assignation individuelle) sont a_1, a_2, ..., a_n, fait partie ou ne fait pas partie de la classe K′. Ainsi, si la proposition $P(t_1, t_2, ..., t_n)$ fait partie de K′, l'énoncé $R(a_1, a_2, ..., a_n)$ est vrai, et si cette proposition ne fait pas partie de K′, cet énoncé est faux. Autrement dit : à une variable prédicative P est associé l'ensemble des n-uples d'objets de D, images, par l'assignation individuelle, des n-uples de termes individuels de L′ qui sont arguments de P dans une proposition au moins de K′. Les règles qui déterminent la valeur de vérité d'une proposition de K′, sur la base des deux assignations qui viennent d'être définies, sont celles qui ont été énoncées plus haut dans la définition de la notion d'interprétation.

Il reste à montrer que pour l'interprétation ainsi décrite, le domaine D constitue bien un modèle pour K′. Pour cela examinons les différents types possibles de propositions de K′.

a) Si une proposition de K′ est du type $P(t_1, t_2, ..., t_n)$ où P est une variable prédicative et $t_1, t_2, ..., t_n$ des termes individuels de L′, il résulte de nos définitions que cette proposition est vraie si elle fait partie de K′ et fausse si elle n'en fait pas partie.

b) Soit une proposition complexe, du type $\sim A$, $A \supset B$ ou $(x)A(x)$. Nous supposerons que, pour les propositions A, B et toutes les propositions du type $A(t)$, où t est un terme individuel de L′, on a déjà établi la propriété à démontrer, à savoir : une proposition est vraie si elle fait partie de K′, fausse si elle n'en fait pas partie.

b 1) Examinons le cas d'une proposition de type $\sim A$. Si $\sim A$ fait partie de K′, A ne peut en faire partie, car la classe K′ est cohérente. Mais alors, en vertu de l'hypothèse d'induction, A est faux. Et en vertu de notre règle d'interprétation, $\sim A$ est vrai. Et si $\sim A$ ne fait pas partie de K′, A doit en faire partie, car K′ est complète (comme classe maximale). Mais alors, en vertu de l'hypothèse d'induction, A est vrai. Et en vertu de notre règle d'interprétation, $\sim A$ est faux.

b 2) Examinons ensuite le cas d'une proposition de type $A \supset B$. Si $A \supset B$ fait partie de K′, ou bien $\sim A$ doit faire partie de K′, ou bien B doit en faire partie (les deux conditions pouvant du reste être réunies). Car si ni $\sim A$ ni B n'appartiennent à K′, comme A et $\sim B$ doivent alors appartenir à K' (qui est une classe complète), $A \supset B$ ne peut appartenir à K′. (Si $A \supset$ B faisait partie de K′ dans ces hypothèses, on pourrait dériver de K′, par la règle du *modus ponens*, $\sim A$, et K′ serait non-cohérente.) Si $\sim A$ appartient à K′, en vertu de ce qu'on vient de démontrer, $\sim A$ est vrai et donc A faux. Et si B appartient à K′, en vertu de l'hypothèse d'induction, B est vrai. Donc $A \supset B$ ne peut faire partie de K′ que si A est faux ou B vrai. Mais alors, en vertu de la règle d'interprétation, $A \supset B$ est vrai (car $A \supset B$ ne peut être faux que si A est vrai et B faux en même temps). Si $A \supset B$ ne fait pas partie de K′; comme on vient de le voir, A est vrai et B faux. Et dans ce cas $A \supset B$ est faux.

b 3) Reste à examiner le cas d'une proposition de type $(x)A(x)$. Si $(x)A(x)$ fait partie de K′, en utilisant l'un des axiomes de LP et le *modus ponens*, on peut dériver de K' n'importe quelle proposition de type $A(t)$ où t est un terme individuel quelconque de L′ [4]. Une telle proposition, étant compatible avec K′, doit faire partie de K′ puisque K′ est une classe maximale. En vertu de l'hypothèse d'induction, toutes ces propositions de type $A(t)$ sont donc vraies. Mais alors, en vertu de la règle d'interprétation, $(x)A(x)$ est vrai. (Cette règle nous dit en effet que $(x)A(x)$ est vrai si, quelle que soit l'assignation individuelle choisie, $A(x)$ est vrai. Nous obtenons ici : $A(t)$ est vrai, quel que soit le terme t. L'assignation individuelle que nous avons choisie fait correspondre à tout terme t un objet de D. Dire que $A(t)$ est vrai quel que soit t est équivalent à dire que $A(x)$ est vrai quelle que soit l'assignation individuelle choisie, c'est-à-dire quel que soit l'objet de D associé à x.) Si $(x)A(x)$ ne fait pas partie de K′, $\sim (x)A(x)$ doit en faire partie, car K′ est une classe complète. Mais $\sim (x)A(x)$ est équivalent par définition à $(Ex) \sim A(x)$. Et en vertu de la seconde condition réalisée par la classe K′, cette classe doit contenir la proposition $\sim A(c)$, pour une certaine constante c. En vertu de notre hypothèse d'induction, cette proposition doit donc être vraie et donc la proposition $A(c)$ doit être fausse. Mais alors, en vertu de notre règle d'interprétation, $(x)A(x)$ doit être faux. (Il existe en effet au moins une constante c pour laquelle $A(c)$ est faux. Mais dire cela équivaut à dire qu'il existe au moins une assignation individuelle pour laquelle $A(x)$ est faux. Or c'est là la condition de fausseté prévue pour $(x)A(x)$ par la règle d'interprétation.)

En raisonnant par induction sur la construction des propositions (c'est-à-dire en partant de propositions élémentaires et en passant de proche en proche aux propositions complexes construites au moyen des opérations logiques élémentaires et des quantificateurs), nous pouvons conclure, sur la base des résultats précédents, que toute proposition de K′ est vraie dans l'interprétation proposée, autrement dit que le domaine D (pour cette interprétation), constitue un modèle de K′. Mais comme la classe K dont nous sommes partis fait partie elle-même de la classe K′, toutes les propositions de K sont vraies dans notre interprétation et donc le domaine D constitue un modèle pour K. Le théorème de cohérence est donc établi. On peut montrer, à titre de corollaire, que si une proposition A n'est pas dérivable de la classe K, il existe un modèle de K dans lequel la proposition A est fausse. (Cela signifie que, dans l'interprétation qui définit le modèle, la proposition A est fausse.)

Comme on le voit, la démonstration du théorème de cohérence revient à exhiber une structure (le domaine D muni des relations qui ont été définies sur lui par l'assignation prédicative) qui fournit une sorte de réalisation concrète des propriétés formelles exprimées par les propositions de K. Le théorème d'adéquation est une conséquence immédiate du théorème de cohérence.

4. Bien entendu, lorsqu'on élargit le langage L en un langage L′, on admet que les axiomes et règles s'étendent à toutes les expressions de L′. En particulier, l'un des axiomes de L prend la forme : $(x)A(x) \subset A(t)$, où t est une variable individuelle ou une constante individuelle quelconque de L′.

Il n'a été question jusqu'ici que de l'existence d'un modèle. On peut s'interroger sur la cardinalité du modèle. (Sans entrer ici dans des définitions précises, on pourra dire que la cardinalité d'un ensemble est la propriété commune à cet ensemble et à tous ceux qui lui sont équipotents. On dit que deux ensembles sont équipotents s'il existe entre eux une correspondance biunivoque, qui associe à tout élément de l'un un élément et un seul de l'autre et réciproquement. La cardinalité d'un ensemble fini est donnée par le nombre entier qui correspond au nombre d'éléments de cet ensemble. La cardinalité de l'ensemble des entiers est appelée *puissance du dénombrable.* Tout ensemble qui est équipotent (au sens susdit) à l'ensemble des entiers a cette même cardinalité et on dit qu'il est *dénombrable*. Un ensemble infini qui n'est pas équipotent à l'ensemble des entiers est dit *non-dénombrable.* (C'est le cas par exemple de l'ensemble des nombres réels, ou de l'ensemble des fonctions d'entiers, ou de l'ensemble des suites quelconques d'entiers.) Cantor a montré qu'il est possible de construire une hiérarchie de types d'infinité, commençant par la puissance du dénombrable, et dont les termes successifs peuvent être définis de proche en proche, indéfiniment.) En particulier on peut se demander s'il est toujours possible, quelle que soit la classe K de propositions (de L) considérées, de trouver un modèle qui a le même degré d'infinité que l'ensemble des entiers.

C'est précisément à cette question que répond le théorème de Löwenheim-Skolem. Ce théorème est la généralisation d'une propriété qui résulte d'un théorème dû à Löwenheim. Le théorème de Löwenheim affirme que si une proposition de L est valide dans un domaine infini dénombrable, elle est valide dans n'importe quel domaine (non-vide). On en tire le corollaire suivant : *Si une proposition de L est exemplifiable dans un domaine non-vide quelconque* (de quelque degré d'infinité qu'il soit), *elle est exemplifiable dans un domaine dénombrable.* Skolem a généralisé cette propriété en l'étendant à une classe quelconque de propositions : *Si toutes les propositions d'une classe quelconque de propositions de L sont simultanément exemplifiables dans un domaine non-vide quelconque, elles sont toutes simultanément exemplifiables dans un domaine dénombrable.* On pourra formuler de façon plus compacte le théorème de Löwenheim-Skolem comme suit : *Si une classe de propositions de L admet un modèle quelconque, elle admet un modèle dénombrable* [5].

Il y a moyen de démontrer ce théorème en incorporant en quelque sorte sa démonstration dans celle du théorème de cohérence [6]. Dans l'esquisse

5. Löwenheim a présenté son théorème dans *Über Möglichkeiten im Relativkalkül*. Skolem en a donné une démonstration simplifiée dans *Logisch-kombinatorische Untersuchungen* etc. C'est dans ce même article qu'il a donné sa généralisation du théorème. Dans *Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre*, il a donné une démonstration du théorème de Löwenheim sans l'axiome du choix. Quelques années plus tard, dans *Über einige Grundlagenfragen der Mathematik*, il a donné une nouvelle version de cette démonstration. Il a développé son interprétation du théorème, dans son application à la théorie des ensembles, dans *Sur la portée du théorème de Löwenheim-Skolem.*

6. C'est précisément ainsi que procède Church dans *Introduction to mathematical logic.*

qui a été donnée ci-dessus de cette dernière démonstration, il a été question simplement d'un domaine D infini. On peut montrer qu'il est possible de prendre pour domaine D l'ensemble des entiers ou, ce qui revient au même, un ensemble ayant même puissance que l'ensemble des entiers. (On doit pour cela utiliser une énumération des termes individuels de L′ et des variables prédicatives de L, c'est-à-dire associer un numéro d'ordre — sous la forme d'un nombre entier — à chaque terme individuel de L′ et à chaque variable prédicative de L. Mais cela ne présente aucune difficulté de principe.) On obtient alors la seconde partie du théorème de cohérence sous la forme suivante : *Si une classe de propositions de L est cohérente, elle admet un modèle dénombrable.* En joignant cette propriété à la première partie du théorème de cohérence, on obtient le théorème de Löwenheim-Skolem : *Si une classe de proposition de L admet un modèle* (quelconque), *elle admet un modèle dénombrable.*

Mais on peut aussi donner du théorème de Löwenheim-Skolem une démonstration indépendante de celle du théorème de cohérence, qui fait mieux apparaître sa véritable nature. Cette démonstration consiste à extraire du modèle dont l'existence est affirmée par hypothèse un modèle dénombrable [7]. Le théorème de Löwenheim-Skolem peut facilement être étendu au cas où le langage L dans lequel est formulée la théorie LP contient non seulement des variables individuelles mais aussi un certain nombre (éventuellement une collection infinie dénombrable) de constantes individuelles. Nous nous placerons dans ce cas. Soit donc une classe cohérente K de propositions de L et un domaine D qui, pour une interprétation donnée, constitue un modèle pour K. Nous allons exhiber un sous-ensemble dénombrable de D qui constituera également un modèle pour K.

L'interprétation qui fait de D un modèle pour K se base sur une certaine assignation individuelle et une certaine assignation prédicative. L'assignation individuelle fait correspondre à chaque terme individuel de L (variable ou constante) un objet et un seul du domaine D. Dans le raisonnement qui va suivre, nous allons considérer la partie de cette assignation qui concerne les constantes comme fixée et nous allons restreindre de façon appropriée la partie de cette assignation qui concerne les variables. Par ailleurs nous ne modifierons en rien l'assignation prédicative.

Une proposition de K contiendra, en général, des quantificateurs. Mais elle peut aussi contenir des variables qui ne sont pas liées par des quantificateurs. (Elle peut naturellement ne contenir que des variables de ce genre.) Mais nous pouvons transformer les propositions de K de telle sorte qu'elles ne contiendront plus que des variables quantifiées et que, de plus, les quantificateurs universels et les quantificateurs existentiels apparaîtront sous forme de deux groupes distincts. La métathéorie syntaxique de L

7. Les explications qui suivent ne constituent nullement une démonstration au sens strict. Elles sont destinées simplement à faire apparaître l'idée essentielle du mécanisme de démonstration. Cet exposé s'inspire en partie de la présentation donnée du théorème par Paul Cohen dans *Set theory and the continuum hypothesis.*

nous apprend en effet qu'il est toujours possible de donner à une proposition de L une forme canonique, que nous appellerons *forme normale d'exemplification*, dans laquelle toutes les variables sont quantifiées et dans laquelle, de plus, tous les quantificateurs universels précèdent les quantificateurs existentiels. Nous disposons d'un métathéorème sémantique affirmant qu'une proposition de L est exemplifiable dans un domaine donné si et seulement si sa forme normale d'exemplification est exemplifiable dans ce domaine. Nous pouvons donc, dans notre démonstration, supposer que toutes les propositions de K ont été remplacées par leur forme normale d'exemplification.

Une proposition quelconque de K se présentera donc sous la forme : $(x_1)(x_2)...(x_n)(Ey_1)(Ey_2)...(Ey_m)A$ (où l'expression A contient les variables mentionnées dans les quantificateurs et aucune autre). Dire qu'une proposition de ce genre est exemplifiable dans D, c'est dire que, quels que soient les objets de D associés à x_1, x_2, ..., x_n, il existe au moins une assignation individuelle qui associe à y_1, y_2, ..., y_m des objets tels que, pour une telle assignation, la proposition en question est vraie relativement à *D*.

Nous avons supposé que le langage L contient des constantes. L'assignation individuelle qui rend les propositions de K vraies dans D associe à ces constantes des objets de D. Soit C un sous-ensemble arbitraire de D contenant tous ces objets. Comme les constantes de L forment au plus un ensemble infini dénombrable, nous pouvons toujours nous arranger pour que C soit au plus dénombrable. (Si le nombre de constantes de L est fini, C pourra naturellement être fini.) Nous allons nous servir de C comme noyau de la construction de notre modèle dénombrable. (S'il n'y avait pas de constantes dans L, on pourrait prendre pour noyau un sous-ensemble fini ou dénombrable quelconque de D.) Toutes les assignations individuelles dont il va être question ci-après associeront aux constantes de L (qui figurent dans les propositions de K) des objets de C, exactement comme l'assignation de départ. Comme l'ensemble C sera inclus dans notre modèle, le cas des constantes individuelles est ainsi réglé une fois pour toutes. Passons à l'examen du sort réservé *aux variables individuelles*.

Considérons pour commencer le cas d'une proposition de K qui ne contiendrait pas de quantificateurs existentiels. Soit par exemple $(x_1)...(x_n)A$ une proposition de ce genre. Toute assignation individuelle qui associe aux variables x_{1i}, ..., x_{n2} des objets de C rend automatiquement la proposition en question vraie relativement à C (et donc à tout domaine contenant C), puisque cette proposition est vraie relativement à D et donc est vraie quels que soient les objets de D associés à ces variables. (Nous admettrons que plusieurs variables $x_i i$ peuvent avoir la même image dans C.)

Passons maintenant au cas d'une proposition qui contiendrait des quantificateurs existentiels. Soit par exemple $(x_1)...(x_n)(Ey_1)...(Ey_m)A$ une proposition de ce genre. Appelons S cette proposition. Considérons toutes les assignations qui associent aux variables x_1, ..., x_n respectivement les objets a_1, ..., a_n de C. Parmi ces assignations, il y en a au moins une qui associe à y_1, y_2, ..., y_m respectivement les objets, b_1, b_2, ..., b_m de D de telle sorte que, pour cette assignation, la proposition *S* est vraie relativement à D. Il peut y avoir une infinité d'assignations de ce genre. Choisissons-en une, arbitrairement, et ajoutons à l'ensemble C les objets b_1, b_2, ..., b_m qu'elle associe respectivement à y_1, y_2, ..., y_m [8]. Répétons ce choix pour toutes les assignations, du type décrit ci-dessus, qui associent à x_1, x_2, ..., x_n un *n*-uple d'objets de C. Comme l'ensemble C est au plus dénombrable, il ne peut y avoir qu'une infinité dénombrable de *n*-uples de C et donc de choix. Pour chaque choix, nous ajoutons à C un *m*-uple d'objets de D. Comme la réunion d'un ensembles dénombrable de *m*-uples d'objets est dénombrable, nous aurons donc, au terme de nos choix, ajouté à C un ensemble dénombrable d'objets de D. Remarquons que nous utilisons, dans cette construction, le principe du choix. Ce principe est un axiome célèbre de la théorie des ensembles qui affirme ce qui suit : étant donné une collection infinie d'ensembles, il existe un ensemble formé en prélevant un élément et un seul dans chacun des ensembles de la collection [9].

En procédant de même pour toutes les propositions de K (du type considéré), nous obtenons un ensemble C_1, qui contient C, qui est un sous-ensemble de D, et qui est dénombrable. Comme les propositions de K sont des suites finies de symboles de L et comme l'ensemble des symboles de L est dénombrable, il ne peut y avoir au plus qu'une infinité dénombrable de propositions dans K, *a fortiori* de propositions de K du type considéré. Comme une collection dénombrable d'ensemble dénombrables est dénombrable, nous n'aurons finalement ajouté à C qu'un ensemble dénombrable et l'ensemble résultant C_1 est donc lui-même dénombrable.

Nous n'avons cependant pas le droit de dire que C_1 est un modèle pour K. Considérons en effet une proposition telle que $(x)\,(Ey)A(x, y)$. Si nous associons à x un objet pris dans C, alors, d'après notre construction, nous pouvons trouver une assignation qui associe à y un objet de C_1 tel que, pour cette assignation, notre proposition est vraie relativement à C_1. Mais pour avoir le droit de dire que notre proposition est exemplifiable dans C_1, nous devrions pouvoir affirmer cela quel que soit l'objet associé à x. Or C_1 est plus riche que C. Si nous associons à x un objet de C_1 qui ne se trouve pas dans C, nous ne sommes pas du tout assurés de pouvoir trouver dans C_1 lui-même un objet qui, associé à y, rendra notre proposition vraie dans C_1.

Nous devons donc reprendre notre construction en faisant cette fois jouer à C_1 le rôle que jouait C tout à l'heure. Les mêmes considérations vont pouvoir se répéter, et nous allons aboutir ainsi à un ensemble C_2, qui contient

8. Dans sa démonstration, Skolem fait intervenir, pour représenter ce choix, des fonctions qui dépendent des variables x_1, x_2, ..., x_n. Ainsi la variable y_1 serait remplacée par une fonction $f_1(x_1, x_2, ..., x_n)$, qui, à tout *n*-uple d'objets associés aux variables x_1, x_2, ..., x_n, fait correspondre un objet b_1 choisi parmi ceux pour lesquels la proposition *S* est vraie dans D.

9. Skolem lui-même a indiqué comment modifier la démonstration de façon à éviter le recours à l'axiome du choix. La démonstration donnée par Church ne fait pas intervenir l'axiome du choix; mais elle se base sur une énumération des expressions de L.

C, qui est un sous-ensemble de D, et qui est dénombrable. Mais à propos de cet ensemble C_2 nous devrons faire la même remarque que pour C_1. Aussi devrons-nous de nouveau recommencer notre construction, en partant cette fois de C_2. Et ainsi de suite. Formons l'ensemble-union de tous les ensembles C_i ainsi obtenus, c'est-à-dire l'ensemble $D^\star$ défini comme suit : la condition nécessaire est suffisante pour qu'un objet appartienne à $D^\star$ est qu'il appartienne à un certain ensemble C_i. Comme les ensembles C_i, forment une suite dénombrable et sont eux-mêmes tous dénombrables, l'ensemble $D^\star$ est lui-même dénombrable. En effet, l'union d'une collection dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Cet ensemble $D^\star$ constitue un modèle dénombrable pour notre classe K de propositions. Autrement dit, toutes les propositions de K sont simultanément exemplifiables dans $D^\star$. Ceci est évident pour le cas d'une proposition qui ne contiendrait que des quantificateurs universels. Prenons le cas d'une proposition qui contient de plus des quantificateurs existentiels, par exemple $(x_i) \cdots (x_n) (Ey_1) \cdots (Ey_m)A$. Quels que soient les objets associés aux x_i, en vertu de notre construction, nous pourrons toujours trouver une assignation qui rendra notre proposition vraie dans $D^\star$. En effet, les objets associés aux x_i doivent appartenir à un certain ensemble C_k. Nous sommes certains de pouvoir trouver dans C_{k+1} un m-uple d'objets tels que, en les associant aux y_i, on obtienne une assignation qui rend notre proposition vraie relativement à $D^\star$.

La plus remarquable conséquence du théorème de Löwenheim-Skolem concerne la théorie des ensembles, et se présente sous la forme d'un paradoxe dont la signification est considérable. Il est possible de formaliser la théorie des ensembles dans le cadre de la théorie des prédicats du premier ordre. Plus précisément, il est possible de représenter cette théorie sous forme d'un système axiomatique et d'exprimer ces axiomes sous forme de propositions du langage L, à condition d'inclure dans celui-ci deux constantes prédicatives, la relation d'appartenance (exprimant l'appartenance d'un élément à un ensemble) et la relation d'égalité. Les axiomes de la théorie des ensembles forment une classe infinie (dénombrable) de propositions. Moyennant les axiomes et les règles de la théorie LP, on peut en dériver les théorèmes (connus) de la théorie des ensembles. Comme le théorème de Löwenheim-Skolem peut être étendu sans difficulté au cas d'un langage L muni de constantes prédicatives, il s'applique à l'axiomatique de la théorie des ensembles. Et nous avons le résultat paradoxal : si la théorie des ensembles est exemplifiable, elle est exemplifiable dans un domaine dénombrable. Cette propriété est paradoxale, parce qu'il est possible de représenter, dans le cadre de la théorie axiomatique des ensembles, le célèbre raisonnement de Cantor qui prouve l'existence d'ensembles non-dénombrables. Ce raisonnement montre que, pour obtenir un ensemble non-dénombrable, il suffit par exemple de prendre l'ensemble de tous les sous-ensembles (finis ou infinis) de l'ensemble des nombres entiers. Comme on peut donner un modèle dénombrable pour la théorie des ensembles, il doit donc exister dans ce modèle un objet *ND* qui a les propriétés d'un ensemble non-dénombrable.

Les ensembles de la théorie axiomatisée ont pour images des objets du modèle. Et la relation d'appartenance de la théorie axiomatisée a pour image une relation du même type, *R*, entre objets du modèle. L'ensemble non-dénombrable, qui a pour image l'objet *ND* du modèle, est un ensemble d'ensembles. Aux ensembles qui appartiennent à l'ensemble non-dénombrable de la théorie correspondent des objets qui ont avec l'objet *ND* la relation *R*. Nous pouvons donc dire que l'objet *ND* « contient » (au sens, bien entendu, de la relation *R*, définie sur le modèle) une infinité non-dénombrable d'objets du modèle. Autrement dit, si l'objet *ND* existe (et il doit exister pour que le modèle offre en effet une exemplification à la théorie), il existe un sous-ensemble du modèle qui est non-dénombrable. Mais le modèle lui-même constitue un ensemble dénombrable. Comment un ensemble dénombrable peut-il contenir un ensemble non-dénombrable ?

Pour résoudre ce paradoxe, il faut se rappeler ce que signifie « existence d'un ensemble non-dénombrable » : un ensemble est non-dénombrable s'il n'est pas possible d'établir une correspondance biunivoque (un à un) entre cet ensemble et l'ensemble des entiers. Dans le cadre d'une théorie des ensembles, une correspondance biunivoque est représentée par un ensemble (l'ensemble représentatif de la relation de correspondance biunivoque). Il existe effectivement dans le modèle au moins un ensemble non-dénombrable. Cela signifie qu'il n'existe pas, dans le modèle, d'ensemble effectuant la mise en correspondance biunivoque entre cet ensemble et l'ensemble des entiers (lui-même représenté dans le modèle). Mais dès qu'on se place en dehors du modèle, on peut effectivement établir une correspondance biunivoque entre cet ensemble et l'ensemble des entiers. Autrement dit, les ensembles qui représentent dans le modèle les ensembles non-dénombrables de la théorie sont eux-mêmes des ensembles dénombrables.

On peut faire apparaître d'une autre manière cette limitation du modèle. Appelons *Ee* l'ensemble de tous les sous-ensembles de l'ensemble des entiers, ou, plus simplement, l'ensemble des ensembles d'entiers. Il existe en particulier, dans le modèle dénombrable de la théorie des ensembles, un ensemble qui représente l'ensemble *Ee*. Mais il est dénombrable, alors que *Ee* ne l'est pas. Cela signifie qu'il ne contient pas tous les sous-ensembles de l'ensemble des entiers. Ceci est vrai du reste non seulement pour l'ensemble *Ee* mais pour tous les ensembles infinis : tout ensemble infini a son représentant dans le modèle et on peut former dans le modèle l'ensemble *E* de ses sous-ensembles mais cet ensemble *E* ne contient pas tous les sous-ensembles de l'ensemble en question.

Il y a donc un décalage systématique entre la théorie formalisée et la métathéorie. Il existe des ensembles qui, du point de vue de la théorie, sont non-dénombrables et qui apparaissent comme tels dans tous les modèles de la théorie, mais qui apparaissent comme dénombrables lorsqu'on les regarde de l'extérieur pour ainsi dire, c'est-à-dire du point de vue de la métathéorie. Le concept de cardinalité de la théorie n'est donc pas le même que celui de la métathéorie. Celle-ci se place dans la perspective de ce qu'on pourrait appeler la théorie naïve des ensembles, qui utilise la notion d'ensemble sans lui donner une représentation formelle. La théorie axiomatisée n'utilise la notion d'ensemble que selon le sens précis que lui donnent les axiomes : seuls existent pour elle les ensembles dont l'existence est affirmée par les axiomes ou par les théorèmes que l'on peut en déduire. Skolem interprète cette situation en disant que, par suite de l'axiomatisation, les concepts de la théorie des ensembles et par conséquent, par leur intermédiaire, tous les concepts mathématiques, se trouvent relativisés. Ils n'ont plus un sens absolu, donné en soi, indépendamment de toute représentation, mais ils prennent des sens différents selon le domaine dans lequel ils se réalisent. Le théorème de Löwenheim-Skolem a incontestablement la portée que lui attribue Skolem. Mais il n'en reste pas moins que les notions mathématiques intuitives continuent à jouer, à l'égard des concepts axiomatisés, un rôle régulateur. C'est parce qu'il en est ainsi que l'on parle de l'inadéquation des systèmes axiomatiques.

Pour préciser en quoi consiste au juste cette inadéquation, dans le cas qui nous intéresse, il convient de rapprocher la situation de la théorie axiomatique des ensembles de celle de la théorie axiomatique des nombres entiers. Il existe, comme on sait, un système d'axiomes pour l'arithmétique, dont l'essentiel est dû à Peano. Ce système peut être exprimé dans le cadre du langage L (enrichi de certaines constantes). Comme le principe d'induction n'est qu'un schéma d'axiomes et correspond en réalité à une infinité dénombrable d'axiomes [10], le système d'axiomes de l'arithmétique constitue un ensemble infini de propositions de L. Or on peut démontrer assez aisément que si un ensemble fini ou dénombrable de propositions de L admet un modèle, il admet n'importe quel modèle de cardinalité plus grand. On devrait s'attendre à ce que la théorie axiomatique des nombres n'admette pour modèle que le domaine (dénombrable) formé par l'ensemble des entiers. Or, en vertu de la propriété qu'on vient d'énoncer, si elle admet ce modèle (ce qui est effectivement le cas), elle doit admettre aussi n'importe quel modèle non-dénombrable. Cela indique qu'elle ne réussit pas à caractériser l'ensemble des entiers.

Skolem a du reste établi un résultat qui est d'un certaine manière plus impressionnant encore [11] : il est possible de construire un modèle pour la théorie axiomatique de l'arithmétique qui est dénombrable mais dont le

10. Le principe d'induction affirme, de chaque propriété d'entiers *P* : si la propriété *P* est vraie pour O et si, lorsqu'elle est vraie pour *n*, elle est vraie pour $(n+1)$, elle est vraie pour tout entier. Nous avons donc une proposition distincte pour chaque propriété *P*.

11. Dans *Uber die Unmöglichkeit etc.*. et *Uber die Nicht-Charakterisierbarkeit etc.*. Il a donné une autre présentation de cette question dans *Peano's axioms and models of arithmetic.*

type d'ordre est donné par un ordinal plus grand que celui qui caractérise la suite des entiers. (On pourrait traduire intuitivement cette propriété en disant : dans ce modèle, après les nombres entiers, il y a encore d'autres objets.) Ainsi, même sans dépasser la cardinalité du dénombrable, on peut trouver pour l'axiomatique des entiers des modèles différents de l'ensemble des entiers. Appelons un modèle de ce genre, dont le type d'ordre ou la cardinalité n'est pas le même que celui des entiers, un modèle *non-régulier*.

L'existence des modèles non-réguliers pour l'arithmétique formalisée traduit d'une autre manière l'inadéquation de l'axiomatique des ensembles. Le principe d'induction fait en effet apparaître la notion *propriété d'entiers*. Or une propriété d'entiers peut être considérée (extensionnellement) comme un ensemble d'entiers : c'est l'ensemble des entiers qui vérifient la propriété considérée. Comme il est question, dans le principe d'induction, d'une propriété « quelconque » et donc, par le fait même, d'un sous-ensemble « quelconque » de l'ensemble des entiers, on doit s'attendre en quelque sorte *a priori*, sur la base du théorème de Löwenheim-Skolem, à ce que l'axiomatique des entiers soit inadéquate (puisque le concept d'ensemble est relatif au modèle dans lequel il se réalise). Plus précisément, le principe d'induction, tel qu'il est formulé dans le cadre d'une théorie axiomatisée, ne peut correspondre au principe d'induction de la théorie intuitive des nombres. Selon celle-ci, le principe d'induction s'applique à tous les prédicats d'entiers. Dans le cadre d'une théorie axiomatisée, le principe d'induction s'applique aussi à « tous » les prédicats d'entiers : mais la théorie ne connaît que les prédicats d'entiers qui peuvent être représentés dans le cadre formel qu'elle constitue. Ou, pour employer le vocabulaire ensembliste, la théorie ne connaît que les ensembles d'entiers dont elle peut établir l'existence par ses moyens propres. Or il n'est pas possible de représenter dans un système axiomatique tous les prédicats d'entiers.

On peut montrer cela au moyen du célèbre argument de la diagonale, qui a servi à Cantor à démontrer que l'ensemble des parties d'un ensemble a une cardinalité plus grande que celle de l'ensemble donné [12]. Soit un système axiomatique pour la théorie des nombres entiers. On peut énumérer tous les ensembles d'entiers dont l'existence peut être prouvée dans ce système. En effet, il suffit d'appliquer à ce système le théorème de Löwenheim-Skolem pour obtenir un modèle dénombrable du système : or ce modèle devra contenir les objets qui correspondent aux ensembles d'entiers du système. Du reste l'existence d'un ensemble d'entiers est affirmée sous forme d'une proposition de longueur finie. Or il ne peut y avoir qu'une infinité dénombrable de propositions de ce genre dans un système axiomatique (puisque la liste des symboles du système est dénombrable). Nous pouvons, en dehors du système, définir un ensemble d'entiers E comme suit : un nombre entier n fait partie de E si et seulement si il n'appartient pas au n^e ensemble de notre énumération. L'ensemble E ne peut certainement pas appartenir à

12. C'est ce que fait remarquer Wang dans *On formalization*.

notre énumération. Il est en effet distinct de chaque ensemble de cette énumération au moins par le nombre *n* (correspondant au numéro d'ordre de cet ensemble dans l'énumération). Ainsi il n'est pas possible de représenter dans un système axiomatique tous les prédicats d'entiers (de l'arithmétique intuitive) pas plus qu'il n'est possible de représenter dans un système axiomatique tous les ensembles de la théorie intuitive des ensembles. Et cela explique qu'une théorie axiomatique des nombres admette d'autres modèles que l'ensemble des entiers : elle est en quelque sorte trop pauvre pour caractériser entièrement le domaine des entiers, elle comporte comme une frange d'indétermination qui la rend apte à représenter d'autres structures que celle des entiers.

Le théorème de Löwenheim-Skolem a été généralisé par Henkin [13] pour une théorie logique incluant une théorie de types (c'est-à-dire admettant une hiérarchie infinie de niveaux de prédicats et, à chaque niveau, la quantification des prédicats du niveau précédent), sous la forme suivante : un ensemble K de propositions de cette théorie admet un modèle dénombrable si et seulement si chaque sous-ensemble fini de K admet un modèle (quelconque). Henkin a montré comment, à partir de cette généralisation, on peut construire des modèles non-réguliers pour toute théorie axiomatisée de l'arithmétique, soulignant ainsi d'une nouvelle manière la parenté entre le théorème de Löwenheim-Skolem, et donc l'inadéquation de la théorie axiomatique des ensembles, et l'inadéquation de la théorie axiomatique des nombres.

La notion du *modèle non-régulier* a été généralisée par Rosser et Wang [14] pour une très vaste classe de systèmes formels. Ces auteurs ont montré qu'il existe des systèmes qui admettent des modèles réguliers et des modèles non réguliers (en ce sens généralisé) et des systèmes qui n'admettent que des modèles non réguliers. Cela fait apparaître d'une nouvelle manière la relativité des concepts mathématiques, mise en évidence par Skolem. Des notions de base telles que les notions d'égalité, de nombre entier, de nombre ordinal, d'ensemble, ont un sens « classique », quand elles sont représentées dans des systèmes à modèles réguliers. Mais il existe des systèmes d'une grande puissance logique qui n'admettent pas de modèles réguliers et dans lesquels ces notions prennent un sens nouveau, généralisé. Mais ces systèmes sont en quelque sorte moins sûrs que les systèmes classiques : ils occupent une situation intermédiaire entre la sécurité logique des systèmes classiques et la contradiction.

Mais, sous ces généralisations, nous devons retrouver l'essentiel de la signification de notre théorème. Comme nous l'avons vu, il entraîne l'inadéquation de la théorie axiomatisée des ensembles et de la théorie axioma-

13. Dans *Completeness in the theory of types.*
14. Dans *Non-standard models for formal logics.*

tisée des nombres. Or, de part et d'autre, ce qui permet de mettre en évidence cette inadéquation, c'est l'argument de la diagonale. On l'a vu clairement dans le cas de l'arithmétique. En ce qui concerne les ensembles, on a vu que la théorie axiomatisée des ensembles admet un modèle dénombrable parce qu'elle ne permet pas de représenter tous les ensembles de la théorie intuitive. Or lorsque celle-ci démontre l'existence d'ensembles non-dénombrables, elle fait intervenir (comme le principe d'induction de l'arithmétique intuitive) tous les ensembles d'entiers. C'est bien cette totalité des ensembles d'entiers qui est invoquée dans l'argument de la diagonale. Certes, il est possible de représenter le raisonnement de la diagonale dans le cadre d'un système axiomatique, mais il y perd en quelque sorte sa vertu : il ne peut plus produire effectivement le non-dénombrable, parce que la totalité qui intervient dans le système n'a plus un sens absolu, mais est relative aux possibilités de représentation du système.

Rappelons l'essentiel de l'argument de la diagonale. Soit E un ensemble quelconque et PE l'ensemble des parties (ou du sous-ensemble) de E. On va montrer qu'il n'existe pas de correspondance biunivoque entre E et PE. Supposons qu'il existe une telle correspondance, et désignons par Pa l'objet de PE associé à l'objet a de E. Étant donné un sous-ensemble Pa de E, a (qui lui est associé) peut lui appartenir ou ne pas lui appartenir. Formons un ensemble D (ensemble diagonal) au moyen de la condition suivante : la condition nécessaire et suffisante pour qu'un objet a de E fasse partie de D est qu'il ne fasse pas partie du Pa correspondant. Cet ensemble D sera nécessairement distinct de tous les sous-ensembles Pa : si un Pa contient l'objet a, alors D ne peut le contenir, et si un Pa ne contient pas l'objet a, alors D doit le contenir. Or l'ensemble D est bien un sous-ensemble de E. On conclut facilement à partir de là que la cardinalité de PE est plus élevée que celle de E.

Comme on le voit, la définition de l'ensemble D fait intervenir la totalité des sous-ensembles Pa et présuppose que tous ces sous-ensembles sont connus (puisqu'on doit pouvoir déterminer pour chacun s'il contient ou non l'objet a de E qui lui est associé par hypothèse). En ce sens D est une entité du second degré : la connaissance de D présuppose la connaissance complète de tous les Pa, c'est-à-dire de tous les sous-ensembles de E. Comme D est lui-même un sous-ensemble de E, d'une certaine manière il se présuppose lui-même. Cet ensemble D a donc un caractère paradoxal, qui provient de ce qu'il est une sorte de réflexion de l'ensemble PE en lui-même. La théorie intuitive réussit à dépasser le dénombrable et à introduire des niveaux de plus en plus élevés d'infinité, mais c'est parce qu'elle considère comme réalisé un ensemble d'opérations qui n'est pas réalisé et qui n'est même pas réalisable effectivement : le parcours de tous les sous-ensembles de l'ensemble de départ. Si elle peut se détacher du dénombrable, c'est donc parce qu'elle n'est pas effective et opère sous le signe du « comme si ».

La théorie intuitive admet qu'elle a à sa disposition tous les sous-ensembles Pa sans se préoccuper de la manière dont ces ensembles lui sont accessibles.

En réalité, elle ne fait que thématiser une visée qui en général enveloppe déjà des thématisations préalables. Dans un premier moment, elle constitue la visée de la suite des entiers, en se représentant la possibilité d'une itération indéfinie de l'opération qui consiste à passer d'un entier au suivant. Dans un deuxième moment, elle prend cette visée comme objet et traite l'ensemble des entiers comme s'il était effectivement disponible, au même titre que les nombres entiers eux-mêmes. Elle se sert de cet ensemble comme d'un modèle pour se représenter de la même manière n'importe quel sous-ensemble infini de l'ensemble des entiers, ou, pour le dire plus simplement, n'importe quel ensemble d'entiers. Dans un troisième moment, elle constitue la visée de la suite des ensembles d'entiers, en se servant du modèle de la suite des entiers et en feignant de croire que l'on peut en effet traiter les ensembles d'entiers comme les entiers. Dans un quatrième moment elle thématise cette visée, sous la forme d'une définition (celle de l'ensemble diagonal) qui inclut la donnée de la totalité des ensembles d'entiers, qui considère donc cette totalité comme présente à la manière d'un objet entièrement disponible. Ultérieurement elle répète cette suite de démarches, en se servant du modèle de la construction de l'ensemble des sous-ensembles de l'ensemble des entiers pour construire l'ensemble des sous-ensembles d'un ensemble quelconque. Lorsque la théorie intuitive parle de « tous » les ensembles d'entiers, ou de « tous » les prédicats d'entiers, elle exprime par là la thématisation de sa visée et ce « tous » a ainsi un sens réflexif. Il y a réflexion de la théorie intuitive en elle-même en ce sens qu'il y a en elle passage du plan de l'expression au plan de l'acte et réciproquement : la visée est un acte, non une expression, mais elle présuppose des expressions, et la thématisation, objectivant la visée, reprend l'acte que constitue celle-ci dans une expression d'un niveau supérieur.

Le système formel ne connaît pas ces changements de plan : il se meut tout entier à un même plan, qui est celui des expressions. Les ensembles dont il parle doivent être effectivement présents pour lui, c'est-à-dire représentables au moyen d'expressions du système. Si le système répond aux conditions d'effectivité auxquelles répondent les systèmes classiques, du type de ceux dont il a été question dans ce qui précède, il n'admettra qu'une infinité au plus dénombrable de symboles et des expressions de longueur finie, et ne pourra donc contenir qu'une infinité dénombrable d'expressions [15]. On ne pourra donc trouver dans de tels systèmes qu'une

15. Nous devons faire remarquer ici que l'on a entrepris depuis un certain temps déjà des recherches sur des systèmes formels qui ne répondent plus aux conditions d'effectivité des systèmes classiques. Il s'agit de systèmes qui contiennent une infinité non dénombrable de symboles, ou (et) des règles de caractère infinitiste (comportant une infinité de prémisses), ou (et) des expressions d'une longueur infinie. L'introduction de tels systèmes correspond évidemment à un élargissement de la notion de système formel et les propriétés qu'ils présentent diffèrent de celles des systèmes classiques. On a pu retrouver cependant pour certains d'entre eux un théorème assez analogue au théorème de Löwenheim-Skolem, qui assigne une cardinalité minimale aux modèles du système (la cardinalité de l'ensemble des parties de l'ensemble des symboles du système). Il reste en tout cas que, pour de tels système comme pour les systèmes classiques, n'existent que les ensembles représentables par des expressions du système.

infinité dénombrable d'ensembles (en particulier, s'il s'agit d'un système axiomatique pour l'arithmétique, une infinité dénombrable d'ensembles d'entiers). Certes il est possible d'exprimer dans un système formel le raisonnement de la diagonale et de se donner ainsi une image, dans le système, des opérations qui permettent à la théorie intuitive de passer au non-dénombrable. Mais cette possibilité même, on l'a vu, traduit la limitation du système : c'est précisément parce qu'il ne contient pas assez d'ensembles qu'il peut démontrer l'existence, en son sein, d'ensembles non-dénombrables. Le regard extérieur qui analyse le système du point de vue de la théorie intuitive le restitue pour ainsi dire à sa limitation et fait rentrer dans le dénombrable ce qui, pour le système, était non-dénombrable.

Lorsque le système, imitant la pensée intuitive, parle de la totalité des ensembles d'entiers, il ne se réfère, en fait, qu'à la totalité des ensembles d'entiers qu'il contient effectivement, non à la totalité virtuelle d'une visée. Les démarches formelles reproduisent bien les démarches de la pensée intuitive, mais d'une manière en quelque sorte tout extérieure; il n'y a pas, dans le système, de véritable réflexion, car il n'y a pas en lui d'acte au sens propre. L'acte de visée, par lequel la pensée intuitive anticipe ses opérations possibles sans s'assurer qu'elle pourra effectivement leur faire correspondre des expressions, est représenté dans le système par un opérateur de totalisation qui ne fait, lui, que récapituler des expressions que l'on peut effectivement retrouver une à une. (Lorsqu'un système formel fait intervenir l'expression *pour tout x*, cela signifie que la variable *x* peut être remplacée par n'importe quel objet d'un certain domaine préassigné.) Ainsi lorsque le système représente la thématisation réflexive de la pensée intuitive, il ne fait que reprendre des expressions dans une expression.

Mais cela indique que les expressions d'un système formel ne sont pas vraiment expressives; elles représentent, elles fournissent un équivalent tangible des opérations de la pensée intuitive, elles ne signifient pas comme celle-ci. La vertu représentative du système, qui fonde d'ailleurs sa fécondité en tant qu'instrument de clarification, est précisément liée à cette abstraction qui détache, dans le système, les expressions des significations. Le système formel exhibe pour ainsi dire à l'état pur, dans une sorte d'en-soi autosuffisant, le schème de structures possibles. La méthode des modèles est précisément destinée à mettre en évidence les structures compatibles avec le système, c'est-à-dire répondant à la forme générale qu'il prescrit. Mais la forme devient objet. C'est pour cela qu'il est possible de l'analyser au moyen de modèles; c'est pour cela aussi que le système peut offrir une image entièrement intelligible des démarches de la pensée intuitive. L'intelligibilité dont il s'agit ici est celle de l'opération : c'est dans ses opérations propres de construction et de dérivation que le système nous fait comprendre, à la manière d'une machine analogique, comment procède la pensée intuitive. La forme opératoire objectivée travaille en quelque sorte par elle-même. En tant qu'elle est opératoire, elle est effectivement productive, elle exhibe des schèmes, elle fait voir des enchaînements. En tant qu'elle est objectivée, elle reste enfermée dans sa propre effectivité et lorsqu'elle représente l'infini, elle le matérialise dans ses propres limites.

La pensée intuitive, par contre, n'isole pas ses expressions de l'intention signifiante qui les porte. C'est pourquoi elle peut incorporer à ses produits ses propres visées totalisatrices, c'est-à-dire son mouvement même. La réflexion qu'elle comporte n'est pas simple récapitulation, mais transgression : la totalisation, supposée accomplie, nous transporte réellement au-delà de ce qui était déjà présent. Aussi, lorsque la pensée intuitive se représente l'infini, le saisit-elle comme l'horizon toujours ouvert de démarches indéfiniment réitérables et superposables, comme le champ toujours disponible d'une incessante transgression. C'est son rapport à cet horizon qui la fait signifiante; en se réfléchissant, elle s'annonce toujours à elle-même. Elle a besoin, certes, du formalisme pour se rendre claires pour elle-même les démarches qu'elle a déjà accomplies. Elle ne semble pas pouvoir s'en remettre au formalisme de décider de ses propres possibilités. La fécondité du formalisme est rétrospective, celle de la pensée intuitive anticipatrice. La force du formel est de rendre présent; mais la présentification de l'infini le finitise. La force de l'intuition est d'annoncer; mais la pure annonce risque toujours de se perdre dans l'indicible. (*Septembre* 1967.)

BIBLIOGRAPHIE

CHURCH (Alonzo), *Introduction to mathematical logic*, vol. I, Princeton University Press, 1956, X + 376 p.

COHEN (Paul), *Set theory and the continuum hypothesis*, New York, Amsterdam, W. A. Benjamin, 1966 154 p.

HENKIN (Leon), « Completeness in the theory of types », *Journal of Symbolic Logic*, vol. 15, 1950, p. 81-91.

LÖWENHEIM (Leopold), « Über Möglichkeiten im Relativkalkül », *Mathematische Annalen*, vol. 76, 1915, p. 447-470.

ROSSER (J. Barkley) and WANG (Hao), « Non-standard models for formal logics, *Journal of Symbolic Logic*, vol. 15, 1950, p. 113-129.

SKOLEM (Thoralf), « Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen », *Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiana, I. Matematisk-naturvidenskabelig Klasse*, 1920, n° 4, 1920, 36 p. — « Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre », in *Wissenschaftliche Vorträge gehalten auf den fünften Kongress der skandinavischen Mathematiker in Helsingfors von 4. bis 7. Juli* 1923, Helsingfors, 1923, p. 217-232. — « Über einige Grundlagenfragen der Mathematik », *Skrifter utgitt av Det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo, I. Matematisk-naturvidenskabelig Klasse*, 1929, n° 4, 1929, 49 p. — « Über die Unmöglichkeit einer vollständigen Charakterisierung der Zahlenreihe mittels eines endlichen Axiomensystems », *Norsk Matematisk Forenings Skrifter*, séries II, n° 10, 1933, p. 73-82. — « Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariablen. *Fundamenta Mathematicae*, vol. 23, 1934, p. 150-161. — « Sur la portée du théorème de Löwenheim-Skolem, in *Les entretiens de Zürich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques, 6-9 décembre* 1938, p. 25-47. — « Peano's axioms and models of arithmetic », in *Mathematical interpretations of formal systems*, Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1955, p. 1-14.

WANG (Hao), « On formalization », *Mind*, vol. 64, 1955, p. 226-238.

Robert Blanché

Sur le système des connecteurs interpropositionnels

1

Lorsque la combinatoire, succédant à ce relevé purement empirique que suggéraient les usages linguistiques, eut dressé la table des seize connecteurs binaires que comporte nécessairement le calcul des propositions fondé sur les fonctions de vérité, on s'est naturellement soucié de reconnaître entre ces divers connecteurs certaines parentés, qui permissent, en raison des groupements qu'elles dégagent, d'introduire dans la table un commencement d'organisation.

On peut d'abord procéder d'une manière formelle et quasi mécanique, en se fondant sur le fait que les divers connecteurs sont interdéfinissables avec le secours de la seule négation. On voit alors qu'à partir de l'un quelconque des seize connecteurs théoriques entre deux propositions p et q — et pour ne considérer que celles des définitions qui ne comptent qu'une seule occurrence de p et de q — on peut d'abord en obtenir trois autres en faisant porter la négation soit sur p, soit sur q, soit sur les deux à la fois : par exemple à partir de $p \vee q$ on aura $\bar{p} \vee q (\equiv p \supset q)$, $p \vee \bar{q} (\equiv p \subset q)$, $\bar{p} \vee \bar{q} (\equiv p \mid q)$; puis, en affectant chacune de ces quatre formules d'une négation globale, on doublera la liste, obtenant ainsi un ensemble de huit connecteurs. Telle est la procédure adoptée par K. Döhmann dans une récente étude [1]. Mais en agissant ainsi sur chacun des seize connecteurs pris comme origine, on s'aperçoit aussitôt que dans la moitié des cas les huit formules ne donnent réellement que deux connecteurs, dont chacun a seulement reçu quatre formulations différentes mais équivalentes, par exemple à partir de $p \mathsf{W} q$: $\bar{p} \mathsf{W} q$ (équivalent à $p \equiv q$), $p \mathsf{W} \bar{q}$ (*id.*), $\bar{p} \mathsf{W} \bar{q}$ (équivalent à $p \mathsf{W} q$), etc. Et dans l'autre moitié, ce sont toujours les mêmes huit autres connecteurs, à savoir ceux des jonctions et ceux des implications, qui reviennent, avec seulement, pour chacun des cas, un changement dans l'ordre.

1. Karl Döhmann, « Der Gruppencharakter der Transformationen der dyadischen Aussage-Verknüpfungen », *Logique et Analyse*, n° 38, juin 1967, p. 218-228.

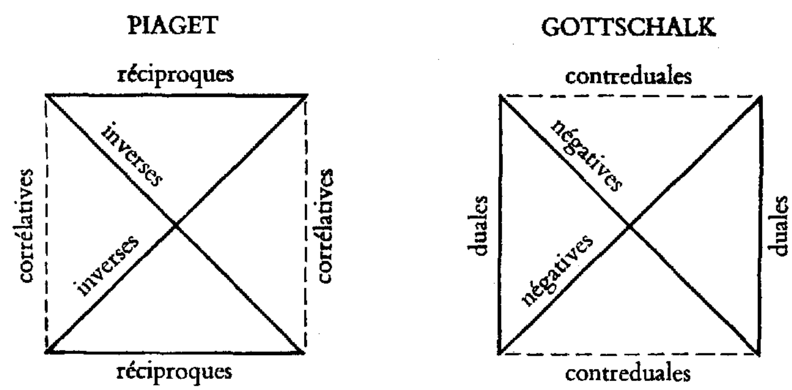
Pareille systématisation nous paraît passablement artificielle. Elle applique aveuglément un principe de diversification posé *a priori*, et dont le caractère relativement inadapté apparaît en ceci, que la matière lui oppose, dans la moitié des cas, une résistance. De plus, elle ne nous renseigne guère sur les rapports fonctionnels entre les divers connecteurs, qui sont tous mis sur le même plan. Nous pouvons néanmoins, au début de notre étude, en retenir deux leçons. La première, d'ailleurs parfaitement banale, est qu'à chaque connecteur on peut en associer un autre qui en est l'exacte négation, en ce que sa table permute, avec celle du premier, le vrai et le faux : ce qui permet d'assembler les seize connecteurs en huit couples. La seconde est la différence marquée qui se manifeste entre l'ensemble des jonctions et des implications d'une part et, d'autre part, celui des huit autres connecteurs. En d'autres termes, ce mode de systématisation nous met en présence de deux dichotomies distinctes, et qui se recoupent : celle qui oppose à chaque connecteur son négateur, et celle qui répartit les seize connecteurs en deux ensembles de huit dont l'un, dégénéré, nous ramène à quatre couples d'opposés contradictoires, tandis que l'autre présente une structure plus riche, dont Döhmann donne une analyse qui rejoint celle d'autres auteurs que nous allons rencontrer dans un instant. De ces analyses nous pourrons nous inspirer, mais seulement en les prenant comme un point de départ pour pousser plus avant. Car il subsiste des questions. Le sens de la première dichotomie est certes parfaitement clair, le rapport fonctionnel entre les deux membres de chaque couple d'opposés contradictoires étant celui, bien connu, de la négation mutuelle formant alternative. La seconde au contraire pose un problème : que signifie-t-elle, et comment ses termes s'articulent-ils entre eux d'un point de vue fonctionnel?

Après cette première manière d'associer deux connecteurs par la relation de négativité pour en faire des *couples d'opposés*, un coup d'œil jeté sur leur tableau fait apparaître une autre sorte de parenté entre certains connecteurs, à savoir ceux qui, exprimant une relation asymétrique, sont réversibles et comportent donc un converse. On trouve là un second principe de dualité. Entre ses deux membres, la dissymétrie se manifeste dans leurs tables et, plus immédiatement perceptible, dans leurs symboles, orientés dans deux sens opposés. Tel est le cas de l'implication, avec ses deux formes $p \supset q$ et $p \subset q$. Comme chacun de ces deux connecteurs a son correspondant négatif, on peut, en combinant ces deux dualités, réunir en un groupe ces quatre connecteurs et former ainsi le *quaterne des implications*, qu'on pourra, pour plus de clarté intuitive, ordonner spatialement en un carré. Ainsi procède J. Piaget[2], qui dispose diagonalement les couples des négations mutuelles, et situe sur chacun des deux côtés horizontaux les couples des converses, qu'il appelle — ayant réservé le mot d'« inverses » pour qualifier les négatives — des « réciproques ». Maintenant, la combinaison de ces deux sortes de couples en une structure quadratique a pour effet d'appeler

2. Jean Piaget, *Traité de Logique*, 1949, p. 272, quaterne B.

un mode de couplage complémentaire, chacun des termes se trouvant mis en un certain rapport (symbolisé par les côtés verticaux du carré) avec celui qui est le réciproque de son inverse ou, ce qui revient au même, l'inverse de son réciproque; Piaget l'appelle son « corrélatif ».

Enfin, une troisième façon d'accoupler des connecteurs est suggérée par une dualité remarquable, de portée très générale, et qui joue ici entre disjonction et conjonction. Les lois de De Morgan, en posant l'équivalence entre $\overline{p \vee q}$ et $\bar{p} \cdot \bar{q}$ ainsi qu'entre $\overline{p \cdot q}$ et $\bar{p} \vee \bar{q}$, expriment cette correspondance entre les formules disjonctives et les formules conjonctives et permettent de les traduire commodément l'une dans l'autre. Si alors on associe à chacun de ces deux connecteurs sa négation, respectivement le rejet et l'incompatibilité, on obtient un second quaterne, le *quaterne des jonctions*. Ainsi W. H. Gottschalk [3] analyse un système quaternaire assez semblable à celui de Piaget, mais qui s'en distingue essentiellement en ce que le principe générateur qui s'y combine avec celui de la négativité est celui de la dualité morganienne, et non plus celui de la réciprocité des converses. Ce sont maintenant les côtés verticaux du carré, porteurs de cette relation de dualité, qui le déterminent. Restent alors à considérer les relations symbolisées par les horizontales, c'est-à-dire les duales des négatives, ou négatives des duales : Gottschalk les appelle les « contreduales ». La figure ci-dessous, où est mise en pointillé la relation qui complète le carré, permet la comparaison entre les deux structures :



Seulement, ni Piaget ni Gottschalk ne limitent cette structure au cas typique que, si l'on en juge par leur vocabulaire, ils avaient apparemment dans l'esprit et qui, en tout cas, est celui auquel s'adapte le plus exactement leur schéma. Gottschalk, procédant en mathématicien, présente d'abord une théorie générale et abstraite de la quaternalité; il l'illustre ensuite par divers « modèles » que comporte cette structure, entre autres ceux qu'on peut construire à l'aide des tables de vérité du calcul des propositions; mais pour ceux-ci, en symbolisant par la lettre Φ, installée [4] aux quatre coins

3. W. H. Gottschalk, « The theory of quaternality », *Journal of Symbolic Logic*, 1953, p. 193-196.

4. Avec les indices nécessaires : Φ^N, Φ^D, Φ^C. A vrai dire, Φ symbolise une *formule* quelconque du calcul des propositions; mais cela revient, pour notre propos, à symboliser le connecteur principal de cette formule, puisqu'il est la seule variable quand on passe d'un coin du carré à l'autre.

de son carré, un connecteur quelconque de ce calcul, il laisse entendre que son diagramme peut se tracer à partir de n'importe lequel d'entre eux. Piaget va en sens inverse : partant d'un examen des connecteurs [5], c'est au terme de son analyse qu'il reconnaît qu'il a eu affaire au groupe quadratique de Klein [6]; Mais c'est expressément qu'il a appliqué, lui, cette structure à l'ensemble des seize connecteurs. Il les répartit en effet en quatre quaternes, quitte à admettre que deux d'entre eux présentent des formes dégénérées.

2

Ces théories, aux résultats convergents, sont précieuses à qui se propose d'organiser les connecteurs en une structure d'ensemble, et sans doute sont-elles, pour ce travail, une étape nécessaire. On ne peut cependant s'en tenir là, ni même les admettre sans retouches. Elles ne sont pas seulement incomplètes, ne nous apprenant rien sur la façon dont se comportent entre eux les divers quaternes; elles souffrent aussi de quelques assimilations sommaires, que refuse une analyse plus fine; enfin elles ne sont même pas toujours exemptes, quand on les pousse dans leurs détails, de ce qu'il faut bien regarder comme des inexactitudes.

On est d'abord frappé du nombre des connecteurs — exactement la moitié — qui échappent à cette structure quadratique, ou du moins qui ne s'y soumettent que par violence, puisque seuls s'y prêtent naturellement le groupe des jonctions et celui des implications. A ces connecteurs rebelles, Gottschalk fait à peine allusion : il pouvait en effet, ou plutôt il devait, son propos étant autre, laisser de côté ce qui ne s'accordait pas à la théorie de la quaternalité qui faisait l'objet de son article. Piaget au contraire, faisant porter son étude sur le calcul des propositions abordé par le biais des fonctions de vérité, était naturellement amené à s'occuper de ces connecteurs. Mais il veut les adapter de force à sa structure quadratique et il y parvient sans doute, mais avec quelque hésitation, semble-t-il, entre deux manières différentes, l'une et l'autre assez artificielles, et qui, par surcroît, s'accordent mal entre elles. Il commence par répartir ces huit connecteurs qui lui restent en quatre couples, en associant chacun à son « inverse », c'est-à-dire à sa négation. De ce point de vue, chacun de ces couples peut être regardé comme un quaterne dégénéré : soit que, comme c'est le cas pour tautologie-contradiction et pour équivalence-alternative, ses deux termes, parfaitement symétriques, soient à eux-mêmes leur propre réciproque de sorte que, la ligne horizontale s'évanouissant par télescopage, le carré s'amincit jusqu'à se réduire à une simple ligne verticale où les corrélatifs se confondent avec les inverses; soit que, comme c'est le cas pour les deux derniers couples,

5. Plus exactement, des *opérations* interpropositionnelles; mais comme celles-ci sont commandées par les opérateurs correspondants, qui sont les connecteurs, la transposition est permise.

6. C'est également ce groupe que retrouve Döhmann dans l'étude à laquelle nous nous référions tantôt.

chacun des termes soit son propre corrélatif, de sorte que cette fois le carré s'aplatit, par contraction complète de la ligne verticale, et se réduit à une simple ligne horizontale, celle des réciproques sur laquelle s'est rabattue pour s'y confondre la ligne des inverses. C'est ingénieux et acceptable. Mais aussitôt l'auteur s'engage dans une autre voie. Il assemble maintenant ces couples deux par deux, en vertu des analogies que nous venons d'indiquer; et cela, certes, est encore légitime. Seulement, il conserve le mot de « quaterne » pour désigner chacun de ces deux assemblages. Et il hésite à nouveau : tantôt (quaterne C) juxtaposant en un seul quaterne deux de ces couples dont chacun apparaissait d'abord comme étant lui-même un quaterne dégénéré, tantôt (quaterne D) disposant les deux couples selon la forme quadratique, alors que les relations caractéristiques qu'on avait d'abord attachées à cette forme sont ici complètement bouleversées. Dans un cas comme dans l'autre, il est clair que le mot de quaterne est pris maintenant dans une acception beaucoup plus vague, qui ne dépasse guère la notion d'un quatuor d'éléments plus ou moins apparentés. Il avait d'abord désigné un *être mathématique* doué d'une structure bien déterminée, la structure quadratique de Klein sur laquelle se rencontrent les analyses de Piaget, de Gottschalk et de Döhmann, structure qui permet d'ordonner, comme Piaget venait lui-même de le faire, la famille des jonctions et celle des implications. Mais le mot est entendu maintenant au sens d'une simple *classe logique*, qu'on forme en vertu de certaines ressemblances que présentent des éléments, dont il se trouve qu'ils sont au nombre de quatre, préalablement répartis en deux couples.

3

C'est donc dans une autre voie qu'il faut s'engager [7] pour poursuivre la structuration du tableau des seize connecteurs binaires, c'est-à-dire d'une part pour rattacher les quatre couples d'antithétiques aux deux quaternes fermement construits, d'autre part pour déterminer exactement le rapport entre ces deux derniers.

Nous pourrons d'abord simplifier le premier de ces problèmes en négligeant systématiquement les deux couples que Piaget a ressemblés dans son quaterne D, à savoir l'affirmation ou la négation de p ou de q. Ceux-là sont incontestablement des binaires dégénérés, retombés au niveau des foncteurs singulaires. Ils ne figurent dans le tableau des connecteurs binaires que pour des raisons de pure combinatoire puisque, portant sur une seule proposition, ils ne sont réellement ni des binaires ni, partant, des connecteurs. On ne peut les ranger parmi les binaires qu'au sens où l'on rangerait parmi les duos

7. Nous reprenons ici, mais sous une forme différente, comportant quelques suppressions ou condensations, et quelques additions ou développements, l'essentiel de ce que nous avons exposé dans *Structures intellectuelles* (Vrin, 1966), chap. IX, et dans *Raison et discours* (*ibid.*, 1967), chap. VII, § 20.

une partition où l'un des deux « exécutants » demeurerait constamment silencieux. De fait, ils ne servent à rien, et les logiciens n'ont pas éprouvé le besoin de leur assigner un symbole. Pourquoi en effet faire appel à une forme inutilement compliquée, puisqu'on peut exprimer la même chose en écrivant simplement p, ou q, ou $\bar{p}$, ou $\bar{q}$? N'ayons donc aucun scrupule à les laisser de côté.

Nous ne pouvons pas en user de même avec les deux autres couples, tautologie-contradiction, équivalence-alternative, lesquels jouent un rôle essentiel dans le calcul. Mais il faut se garder, non seulement de les grouper en un quaterne, mais même de les assembler en une même classe. Si l'on peut être tenté de le faire en raison de certaines analogies, on masque ainsi ce fait capital, que le couple tautologie-contradiction diffère totalement, par ses fonctions, non seulement du couple équivalence-alternative, mais de l'ensemble des autres connecteurs; de sorte qu'il faut lui ménager, parmi ceux-ci, une place tout à fait à part, comme c'est d'ailleurs très généralement reconnu.

D'abord parce que la tautologie et la contradiction ne sont pas essentiellement, comme sont l'équivalence et l'alternative, des *binaires*. On pourrait sous ce rapport, comme fait Parry [8], les joindre aux quatre dégénérés pour dire que ces six prétendus binaires sont en réalité assimilables à des singulaires, dont la table les retrouve à ses deux extrémités; mais on dirait aussi bien qu'ils sont des ternaires, ou plus généralement des *n*-aires, puisque, de toute façon, ils déterminent les deux limites extrêmes de la table. Faut-il même les regarder comme de vrais *connecteurs* ? On ne peut les ranger parmi ceux-ci que selon ce genre de convention par laquelle le mathématicien s'autorise à inclure dans un ensemble les termes qui forment ses frontières, par exemple à traiter zéro comme un entier, à regarder un segment de droite comme un angle de 0° ou de 360°, etc. La vérité d'une formule tautologique, ou la fausseté d'une formule contradictoire, n'est pas proprement *fonction* de celle des propositions élémentaires qui la composent, puisqu'elle ne varie pas *en fonction* de celle-ci; ou alors disons seulement, en un sens élargi, que tautologie et contradiction « sont des fonctions dont la valeur est constante [9] ». Mais quel que soit le choix du vocabulaire, il reste qu'une différence fondamentale sépare ces « foncteurs », ces « connecteurs », ces « opérateurs », de tous les autres. L'écriture symbolique manifeste cette différence. On n'écrit pas $p\mathrm{T}q$ comme on écrit, par exemple, $p \equiv q$ ou $p \mathrm{W} q$, $p \vee q$ ou $p \supset q$; on dit, *dans la métalangue*, qu'une formule telle que, par exemple, $p \supset q \cdot \equiv \cdot \bar{p} \vee q$ est tautologique; ou bien on la fait précéder du symbole métalinguistique d'assertion, lequel porte d'ailleurs sur l'ensemble de la formule et ne joue

8. *Journal of Symbolic Logic*, 1954, p. 162.

9. J. Dopp, *Leçons de logique formelle*, Louvain, 1950, vol. II, p. 67, qui ajoute ce commentaire : « On voit donc que l'idée de « fonction » dont nous sommes partis doit être prise en un sens assez large pour s'appliquer au cas d'expressions dont la valeur ne varie pas lorsque varie la valeur des variables qu'elles mentionnent. C'est là, au reste, un procédé d'élargissement de notions qui est fréquemment pratiqué dans les sciences modernes. »

donc pas proprement le rôle d'un connecteur; il porte *sur* le connecteur principal de la formule, pour marquer que celui-ci prend une valeur apodictique. Reichenbach peut donc écrire, en un sens parfaitement acceptable, que « ces deux cas extrêmes ne définissent pas des opérations » — en tout cas, pas des opérations dans le même sens que les autres — de sorte que si l'on retranche en outre les quatre cas de dégénérescence, il ne subsiste plus réellement que dix opérations [10], les seules, en fait, à avoir leur symbole.

Plutôt que deux opérateurs ou connecteurs particuliers, il est donc plus exact, d'un point de vue fonctionnel, de regarder la tautologie et la contradiction, à la manière de Serrus dont se moque Piaget [11], comme des sortes de matrices desquelles s'obtiennent les véritables connecteurs. On pourra le voir commodément avec la disposition suivante. Écrivons sur une première ligne la forme normale disjonctive de la tautologie; puis, en dessous, en une seconde ligne, les négations de chacun des quatre éléments de la première, c'est-à-dire la forme normale disjonctive de la contradiction, en en modifiant seulement l'ordre usuel de façon que tous les couples de négations mutuelles soient disposés en obliques, déterminant ainsi comme deux carrés. On constate alors que le groupe des quatre éléments de gauche forme le carré des jonctions, et que celui des quatre éléments de droite forme le carré des implications, exprimé naturellement ici en langage de jonctions [12] :

$$\begin{array}{ccccccc} p \cdot q & \vee & \bar{p} \cdot \bar{q} & \vee & \bar{p} \cdot q & \vee & p \cdot \bar{q} \\ \overline{\bar{p} \cdot \bar{q}} & \vee & \overline{p \cdot q} & \vee & \overline{p \cdot \bar{q}} & \vee & \overline{\bar{p} \cdot q} \end{array}$$

quaterne des jonctions (formules symétriques) — quaterne des implications (formules asymétriques)

Si maintenant, dans la première ligne ci-dessus, on prend le premier couple, on s'aperçoit que cette disjonction donne l'équivalence $p \equiv q$, et si l'on prend le second, qu'elle donne l'alternative $p \mathrm{W} q$. On retrouverait ce même couple si l'on opérait sur la seconde ligne, mais cette fois en conjoignant, au lieu de les disjoindre [13], les deux termes de chaque couple, la première de ces conjonctions donnant l'alternative, la seconde donnant l'équivalence. On obtiendrait naturellement des résultats analogues, *mutatis mutandis*, si l'on partait des formes normales conjonctives de la tautologie et de la contradiction. C'est là une première façon, encore un peu sommaire, de marquer les relations essentielles des deux véritables connecteurs binaires, en les dégageant de leur matrice commune.

10. H. Reichenbach, *Elements of symbolic Logic*, New York, 1947, p. 34-35.

11. *Ouv. cité*, p. 267.

12. On sait que $p \supset q \cdot \equiv \cdot \overline{p \cdot \bar{q}}$, etc. On remarquera que le dernier carré apparaît sens dessus dessous par rapport au premier, puisque son élément générateur, à savoir l'implication, se trouve situé sur la seconde ligne, au lieu de figurer, comme était la conjonction, sur la première. On comprendra plus loin la signification de ce renversement.

13. Là encore, on comprendra plus loin la signification de cette permutation.

4

Considérons maintenant de plus près la structure quaternaire qui est commune, aux termes près, aux théories de Piaget et de Gottschalk, et qui ne s'adapte exactement qu'au cas des jonctions et des implications. Il est d'abord assez manifeste que, pour isomorphes qu'ils soient, les deux quaternes ne résultent pas du même mode de construction, ainsi que nous l'avons noté dès le départ, et comme le fait apparaître la comparaison de nos deux schémas du § 1. Seule leur est commune la relation des inverses-négatives, laquelle, en dehors d'eux, joue d'une façon générale pour l'ensemble des connecteurs. En revanche, la relation de réciprocité ne joue proprement qu'entre des connecteurs asymétriques comme sont les implications, et ne peut donc être étendue au cas des jonctions que par un élargissement forcé du sens du mot : car pour des connecteurs symétriques, le renversement de la relation ou de son symbole, ou, ce qui revient au même, la permutation de ses termes, est une opération identique qui ne saurait, comme telle, fournir un principe de dualité. La dualité morganienne, d'autre part, joue essentiellement entre des jonctions, et ne s'étend ensuite aux implications que parce que celles-ci se laissent traduire en jonctions. Dans chacun des deux quaternes, le troisième mode de couplage apparaît alors comme dérivé. Les « corrélatives », dont le nom même est peu expressif, ce sont simplement les inverses des réciproques qui sont aussi bien les réciproques des inverses ; et des « contre-duales » on dirait également que leur nom est peu expressif, si ce n'est qu'il exprime précisément, par rapport aux « duales », leur caractère dérivé.

N'insistons pas cependant sur cette différence dans le principe de formation des deux quaternes, puisqu'elle n'affecte guère, du moins à première inspection, la structure des deux carrés une fois formés. Mais, une fois ainsi admise leur assimilation d'un point de vue formel, demandons-nous plutôt si, d'un point de vue formel même, cette structure a bien été, chez nos deux auteurs, suffisamment analysée et si, telle qu'ils la présentent, elle ne souffre pas d'imperfections assez graves. L'un et l'autre se trouvent naturellement amenés, dans la suite de leur analyse, à rapprocher ce quaterne, avec la disposition quadratique qu'ils lui donnent, du classique carré des propositions opposées. Rapprochement parfaitement justifié, mais qui aurait dû mettre en éveil et suggérer de rectifier, en la précisant, la présentation primitive du quaterne. Car une différence saute aussitôt aux yeux : le carré des opposées a un haut et un bas, marqués par la distinction des contraires et des subcontraires, et par la direction de la subalternation ; tandis que celui des connecteurs tolère qu'on le renverse : qu'on regarde son reflet dans un miroir, rien n'est changé à la disposition de ses relations constitutives. Dès lors, de deux choses l'une : ou bien l'analogie formelle entre les quaternes des connecteurs et le carré des propositions opposées n'est que superficielle et partielle, et le rapprochement n'en doit être fait qu'avec certaines réserves ; ou bien le deux systèmes sont réellement isomorphes, et alors il faut retoucher l'esquisse qu'on avait faite du quaterne des connecteurs. Dans les deux cas, par conséquent, des précautions s'imposent. Or, un examen plus attentif révèle que c'est le second membre du dilemme qui est le bon, et qu'il faut donc apporter certaines corrections à la présentation des quaternes.

Si en effet l'on construit d'abord ceux-ci sans se soucier de l'analogie avec le carré des opposées, peu importe qu'on situe le connecteur originaire, conjonction ou implication directe, sur la ligne du haut ou sur celle du bas; on préférera sans doute, en raison précisément de son caractère originaire, le situer en haut; en tout cas, et quelle que soit la ligne choisie, on jugera plus indiqué, pour souligner l'analogie qu'on professe entre les deux quaternes, de situer ces deux connecteurs en des positions homologues, et donc sur la même ligne. Seulement, si l'on en vient ensuite à amener en coïncidence ce schéma quadratique ainsi unifié et traité comme arbitrairement réversible, avec le carré traditionnel des opposées, dont la structure comporte une différenciation selon la verticale, on s'expose à des mécomptes.

Premièrement, le carré des opposées fait une différence entre d'une part les contraires qui, ne souffrant pas d'être vraies ensemble mais pouvant être toutes les deux fausses, se comportent comme des incompatibles, et d'autre part les subcontraires qui, ne souffrant pas d'être fausses ensemble mais pouvant être toutes les deux vraies, se comportent comme des disjointes. Or il est facile de s'apercevoir que cette même différence se retrouve dans les quaternes des connecteurs, ce qui supprime toute liberté pour la place où situer la cellule génératrice. La conjonction entre deux propositions et leur commun rejet sont incompatibles, de même que les deux non-implications entre ces deux propositions; tandis que leur disjonction et leur incompatibilité sont simplement disjointes, de même que les deux implications. La relation horizontale de contredualité-réciprocité doit donc être nuancée, il faut la dédoubler entre contreduales et subcontreduales, ou, selon l'autre vocabulaire, entre réciproques et subréciproques.

Deuxième différence, liée à la précédente : le carré logique distingue entre subalternante et subalternée, la première impliquant la seconde, sans réciprocité. Autre raison pour distinguer de même entre le haut et le bas des quaternes, pour ne pas regarder comme permutables les deux termes des duales-corrélatives, donc pour introduire une dissymétrie dans la relation verticale qui les unit, en la marquant d'une flèche qui pointe vers le bas, bref pour donner aux quaternes une tête et des pieds, et veiller à ne pas les faire reposer sur la tête. Car la relation asymétrique d'implication joue bien dans les deux quaternes, comme il est facile de le vérifier par le calcul ou même par un simple examen des tables de vérité : $p \cdot q \cdot \supset \cdot p \vee q$, $p \wedge q \cdot \supset \cdot p | q$, et de même $p \not\subset q \cdot \supset \cdot p \supset q$, $p \not\supset q \cdot \supset \cdot p \subset q$, sans réciprocité.

Il importe ici de ne pas faire une confusion entre la relation de dualité entre deux connecteurs, qui est symétrique et donc réciproque, en ce sens que la duale de chacun des deux, par exemple conjonction et disjonction

— disons plus exactement conjoncteur et disjoncteur — a l'autre pour sa propre duale, de sorte que si $\overline{p \vee q} \equiv \cdot \bar{p} \cdot \bar{q}$, alors $\overline{p \cdot q} \equiv \cdot \bar{p} \vee \bar{q}$ et réciproquement — et la relation logique entre les deux formules dont chacune a pour connecteur celui qui est en dualité avec l'autre, par exemple la formule conjonctive $p \cdot q$ et la formule disjonctive $p \vee q$, lesquelles n'ont pas même force logique, de sorte que la première implique bien la seconde, mais non inversement.

On verra alors, comme notre tableau du § 3 pouvait le laisser soupçonner, que la cellule originaire de chacun des quaternes ne doit pas être située sur la même ligne : la conjonction doit prendre place à la ligne supérieure, puisqu'elle est subalternante ou implicante par rapport à la disjonction, et contraire ou incompatible par rapport au rejet; tandis que l'implication doit être située à la ligne inférieure, puisqu'elle est subalternée ou impliquée par rapport à la non-implication converse, et qu'elle est subcontraire ou disjointe par rapport à sa propre converse. La raison de cette différence doit être cherchée dans le fait que l'implication, admettant trois cas de vérité, demeure relativement indéterminée quant au vrai, l'un de ses trois cas incluant le cas unique de vérité de la non-implication converse : il est donc impliqué par elle, sans réciprocité. Et de même pour la disjonction et l'incompatibilité. C'est cette indétermination qui oblige à situer tant les deux implications que la disjonction et l'incompatibilité à la place qu'occupent, dans le carré logique, ces indéterminées que sont les particulières. Tandis que sur la ligne supérieure doivent figurer les connecteurs qui sont déterminés au maximum quant au vrai, ne comptant chacun qu'un unique cas de vérité. Un raisonnement analogue expliquerait, pour les connecteurs comme pour les propositions quantifiées classiques, la différence entre le cas des contraires, dont l'unique cas de vérité ne peut coïncider tandis que le peuvent deux de leurs cas de fausseté, et celui des subcontraires, pour lesquels c'est l'inverse. Et l'on comprend, du même coup, pourquoi nous ne pouvons, avec nos seize connecteurs, former que deux quaternes : seuls se prêtent à cette structure quaternaire ceux des connecteurs qui comptent un nombre impair de cas de vérité et de fausseté — ou, ce qui revient au même, ceux qui ont des formes normales impaires : c'est-à-dire exactement la moitié d'entre eux.

5

Dans cette différence de situation, à l'intérieur de chacun de nos deux quaternes, de son élément originaire, conjonction ou implication, on trouvera sans doute une nouvelle raison, s'ajoutant à celle que nous donnions au début, pour se garder de pousser trop loin leur assimilation mutuelle. D'autres raisons interviennent encore qui invitent, non seulement à reconnaître chacun dans son originalité propre, mais à établir entre eux une hiérarchie, ainsi que déjà le suggérait le fait que, des deux connecteurs qui les commandent, c'est la conjonction, non l'implication, qui occupe dans le carré ce qu'on pourrait appeler la place noble, puisqu'elle l'emporte sur l'autre en force et en détermination.

Dans le calcul classique des propositions, les divers « connecteurs » n'établissent pas, entre les deux propositions qu'ils mettent en rapport, une vraie *connexion*. Ils n'ont, comme dit Reichenbach, qu'une fonction purement *adjonctive*. L'implication, notamment, ne marque nullement, comme son nom le suggère faussement aux esprits non prévenus, un lien de dépendance entre deux propositions, plus ou moins apparenté à celui de principe à conséquence. Dire que p implique q, c'est simplement dire qu'on n'a pas à la fois p et non-q, ou encore qu'on a non-p ou q, bref c'est énoncer une conjonction ou une disjonction, qui ne diffèrent de la conjonction $p \cdot q$ et de la disjonction $p \vee q$ qu'en ce qu'elles font intervenir une négation qui, portant sur l'une des deux propositions, donne à la formule l'asymétrie que ne pouvait porter le connecteur jonctif et que requiert l'implication : $\overline{p \cdot \bar{q}}$, ou $\bar{p} \vee q$. L'implication, c'est une jonction avec asymétrie quant à l'affirmation et à la négation de ses deux propositions : c'est-à-dire, en somme, une forme de jonction plus complexe, dérivée d'une jonction qu'on peut bien regarder comme plus élémentaire, puisqu'elle ne présente pas encore cette complication qu'y introduira la dissymétrie entre ses deux membres. C'est pourquoi on a proposé, pour éviter le piège tendu par le vocabulaire, de la qualifier d' « implication adjonctive » (Reichenbach) ou même de la ramener expressément à une espèce particulière de jonction, en qualifiant celle-ci de « philonienne » (W. Kneale). En fait, les logiciens ont bien senti cet ordre de dérivation, puisque, tout en professant qu'on peut, à l'aide de la négation, définir tous les connecteurs à partir de l'un quelconque d'entre eux, ils ont eu le plus souvent tendance à choisir l'une des jonctions comme notion première, et à définir par elle l'implication, comme c'est le cas pour les deux grands traités fondamentaux de logique moderne, les *Principia mathematica* de Whitehead et Russell et les *Grundzüge der theoretischen Logik* de Hilbert et Ackermann. Et de même, les « formes normales » des seize connecteurs sont présentées par Hilbert comme des conjonctions de disjonctions ou des disjonctions de conjonctions.

Il est vrai qu'on pourrait être tenté de renverser l'argument, et de dire : puisque les divers connecteurs sont interdéfinissables, cela nous interdit de privilégier tel ou tel d'entre eux, et nous pouvons aussi bien, si nous le voulons, dériver les jonctions des implications, ainsi que l'ont fait réellement certains logiciens comme Frege et Lukasiewicz. Et de même, il est possible de construire des formes normales implicatives [14]. A pareille objection, nous pourrions d'abord répondre qu'entre diverses constructions également correctes du point de vue logique, la raison peut inviter, pour des motifs de simplicité, de symétrie, de naturel, de genèse effective, etc., à préférer l'une d'entre elles; et nous venons de dire pourquoi, à cet

14. A. Church, *Introduction to mathematical logic*, vol. 1, Princeton, 1956, p. 102.

égard, le caractère purement adjonctif des connecteurs invitait à leur donner pour principes les adjonctions les plus simples, c'est-à-dire, en tout premier lieu, la conjonction. Mais puisqu'une telle réponse ne saurait satisfaire un pur formaliste, plaçons-nous donc nous aussi sur son terrain. L'objection que nous examinons repose sur la thèse classique de l'interdéfinissabilité des seize connecteurs. Juste en gros, cette thèse appelle cependant un examen plus précis dans le cas qui nous occupe, celui de la traductibilité mutuelle entre jonctions et implications. S'il est exact que l'implication se laisse exactement définir, à l'aide de la négation, à partir de la conjonction ou de la disjonction, il n'en va plus tout à fait de même quand on veut procéder en sens inverse. Car si l'on définit la conjonction par $\overline{p \supset \bar{q}}$, et la disjonction par $\bar{p} \supset q$, on laisse échapper une partie du défini, la conjonction comportant aussi le cas où $\overline{q \supset \bar{p}}$, qui n'est pas équivalent à $\overline{p \supset \bar{q}}$, et la disjonction le cas où $\bar{q} \supset p$, non équivalent à $\bar{p} \supset q$. Il faudrait, pour avoir ici une définition qui convienne à tout le défini, *conjoindre* ces deux éléments de la définition, c'est-à-dire faire déjà usage d'une jonction, et introduire ainsi le défini dans le définissant. Ou bien donc la définition demeurera incomplète, ou bien elle souffrira d'une faute grossière. A moins qu'on fasse appel à la métalangue, en se permettant alors de sortir du plan du calcul. En d'autres termes : on n'a pas le droit d'écrire, pour définir exactement $p \cdot q$, la formule $\overline{p \supset \bar{q}} \cdot \overline{q \supset \bar{p}}$, mais seulement l'expression $\overline{p \supset \bar{q}}$ et $\overline{q \supset \bar{p}}$, en révélant par ce « et » non symbolique qu'une jonction ne se laisse pas intégralement traduire, dans la langue du calcul, en termes combinés d'implication et de négation. L'interdéfinissabilité entre les divers connecteurs n'est donc pas parfaite, on doit admettre une certaine irréductibilité des jonctions par rapport aux implications, tandis que la réductibilité joue bien en sens inverse. Ainsi se marque, au niveau même du calcul classique, une certaine priorité logique des jonctions sur les implications.

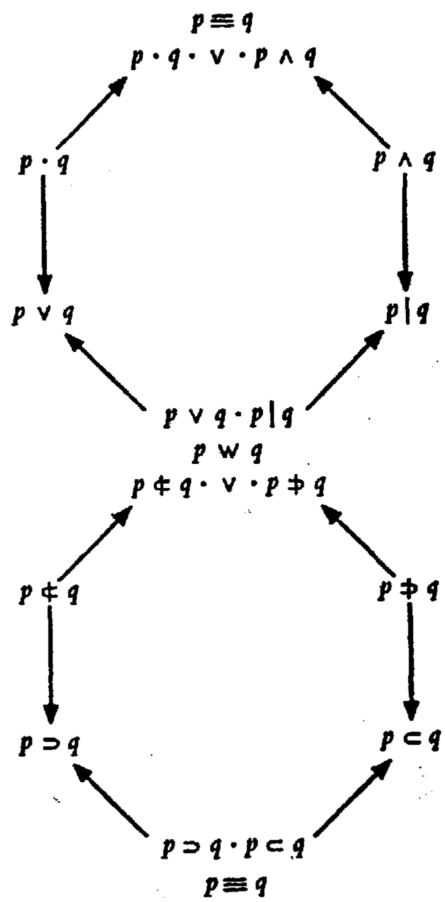
6

Après avoir ainsi essayé de dégager, pour chacun des deux quaternes, ce qui fait son caractère propre, et de les situer l'un par rapport à l'autre dans leur ordre normal de dépendance, revenons maintenant à la structure commune qu'ils présentent une fois constitués, et poursuivons notre recherche d'une organisation systématique de l'ensemble des dix vrais connecteurs.

Le tableau du § 3 nous en avait déjà donné quelque idée. Il nous montrait en effet, d'abord que le couple équivalence-alternative surgissait naturellement dans l'un et l'autre quaterne, mais aussi qu'il y surgissait en des places différentes, avec une sorte de croisement : l'équivalence s'obtenant, avec les jonctions, par la disjonction $p \cdot q \cdot \vee \cdot p \wedge q$ des deux membres de la ligne supérieure, tandis qu'elle s'obtient, avec les implications, par la conjonction $p \supset q \cdot p \subset q$ des deux membres de la ligne inférieure; et inversement pour l'alternative. Ce qui suggérait déjà une certaine manière d'articuler, par la médiation de ce couple, les deux quaternes, et d'achever ainsi le système.

Mais l'analogie structurale que nous avons ensuite reconnue entre nos deux quaternes et le carré logique traditionnel, et qui nous a déjà permis de corriger leur première ébauche, va maintenant nous permettre aussi de préciser cette structure d'ensemble — à condition toutefois que l'on corrige à son tour, ou plutôt que l'on complète, le réseau des relations que soutient ce carré, en lui ajoutant deux postes supplémentaires qui le transforment en un hexagone. Ce n'est pas là une invention *ad hoc*, forgée arbitrairement tout exprès pour arriver à loger notre couple équivalence-alternative. La modification sortira renforcée de cette nouvelle application, mais elle était préalablement appelée, sans même parler des raisons de symétrie, par la seule considération des propositions opposées, où il convient d'introduire entre les deux particulières, pour se conformer aux usages les plus courants du langage et de la pensée, un « quelque » qui les conjoigne, signifiant « un au moins mais non pas tous »; et de même par la considération des quatre modalités aristotéliciennes, pour lever, par l'institution expresse d'une notion qui les conjoigne, l'ambiguïté permanente des notions du possible et du contingent, qui flottent l'un et l'autre entre le sens unilatéral où ils s'opposent comme des subcontraires, et le sens bilatéral où ils se confondent; etc. Ce qui appellera naturellement un sixième poste, pour être la négation contradictoire de celui-ci. Nous avons ailleurs longuement étudié cette structure hexadique, en analysant d'abord, d'un point de vue formel et abstrait, les diverses relations qui jouent entre ses six postes, et en en trouvant ensuite l'application en de multiples « modèles ». Pour poursuivre les désignations traditionnelles des différents postes du carré par les voyelles, nous avons désigné par Y ce poste intermédiaire entre I et O, dont il est la conjonction, et par U sa négation contradictoire, intermédiaire entre A et E dont il est la disjonction.

Or ce cadre hexagonal trouve ici une nouvelle occasion de s'appliquer. Dans le quaterne des jonctions, l'équivalence — disjonction de la conjonction et du rejet qui occupent respectivement les postes A et E — se situe en U, point culminant de l'hexagone, tandis que sa négation qui est l'alternative — conjonction de la disjonction et de l'incompatibilité qui occupent les postes I et O — se situe en Y, au point diamétralement opposé à U. Une même organisation hexadique est possible, selon les mêmes principes, pour les implications, mais en inversant les situations respectives de l'équivalence, qui tombe maintenant en Y, et de l'alternative, maintenant en U. Nous avons alors, par cette double parenté de chacun des deux termes du couple équivalence-alternative, le moyen d'unir les deux familles des jonctions et des implications, et de rassembler le tout en un système unitaire. On le représentera schématiquement par les hexagones ci-dessous, qui communiquent par les postes U et Y où se situent l'équivalence et l'alternative, le poste U de l'un coïncidant avec le poste Y de l'autre, et réciproquement (les flèches marquent le sens dans lequel joue l'implication) :



Il n'est certes pas toujours nécessaire de prendre en considération cette constellation totale, ni même la totalité de l'un de ses hexagones. Certaines familles usuelles de concepts laissent inoccupé, en fait, tel ou tel poste. Il est donc loisible de les négliger éventuellement et de réduire ainsi la structure. On pourra notamment y retrouver, si l'on veut, le carré traditionnel. Ou bien, si le système de notions qu'on analyse requiert une structure ternaire régulière, on isolera le triangle des contraires AYE, en l'associant ou non à celui des subcontraires UIO qui en offre la réplique négative. Pour prendre un exemple, assurons-nous que, dans chacun de nos deux quaternes, la triade des contraires vérifie bien les relations qui caractérisent cette triade sur son schéma formel et abstrait. Nous l'appelons triade (ou triangle, sur sa représentation figurée) des *contraires*, parce qu'entre ses trois termes joue la relation d'incompatibilité, caractéristique de la contrariété : la position de l'un de ses termes excluant celle des deux autres. Seulement, tandis que les deux contraires traditionnels A et E laissent échapper le cas qu'elles excluent en commun, ce troisième cas est précisément celui que recueille le poste Y. Avec cette addition, les contraires cessent de former un système déficient, pour faire place à un système qu'on peut qualifier de parfait, en ce sens qu'il ne comporte ni redondance ni lacune, que ses termes ne sont pas seulement mutuellement exclusifs, c'est-à-dire incompatibles entre eux, mais aussi collectivement exhaustifs. La position de l'un quelconque de ses postes implique la négation des deux autres, puisque les trois sont incompatibles; la négation conjointe de deux quelconques d'entre eux implique l'affirmation du troisième, puisque le système est complet. Or on constate que ces relations jouent bien avec nos deux familles de connecteurs. Pour les implications, avec le triangle $p \not\subset q$, $p \equiv q$, $p \not\supset q$. C'est en effet une thèse du calcul classique des propositions, liée à ce qu'on appelle quelquefois les paradoxes de l'implication, qu'entre deux propositions quelconques il y a toujours, d'une façon ou d'une autre, une relation d'implication. Dès lors, ou bien cette relation est mutuelle, et alors il y a équivalence ou, comme on dit, double implication; ou bien l'une ou l'autre des implications manque, et alors on a nécessairement soit $p \not\subset q$, soit $p \not\supset q$: le système est complet. Et il n'est pas redondant, car les deux derniers cas sont évidemment incompatibles avec le premier, et ils sont, d'autre part, en vertu de la thèse que nous venons de rappeler, incompatibles entre eux. De même pour les jonctions, avec le triangle $p \cdot q$, $p \mathrm{W} q$, $p \wedge q$. Car s'il n'y a pas alternative entre deux propositions, c'est ou bien qu'elles sont toutes les deux vraies, $p \cdot q$, ou bien qu'elles sont toutes les deux fausses, $p \wedge q$: le système est complet. Et il n'est pas redondant, les deux derniers cas étant évidemment incompatibles entre eux et chacun d'eux excluant le premier et étant exclu par lui.

Ainsi viennent s'articuler entre eux les deux quaternes des connecteurs, chacun d'eux s'insérant dans une structure hexadique préalablement reconnue de façon indépendante et dont il apporte une nouvelle réalisation, puis communiquant avec l'autre par le couple qui leur est commun pour former une constellation décadique, celle-ci épuisant la liste des dix connecteurs qui, dans le calcul classique des propositions, sont proprement des opérateurs binaires.

7

Maintenant ce calcul classique lui-même, s'il fournit, par sa simplicité, une base nécessaire à toute étude des rapports logiques entre propositions, est loin de suffire à exprimer tous ceux que met en œuvre la pensée même la plus banale. Il demeure sur le plan de la pure assertion, et écarte systématiquement de ses connecteurs toute nuance modale : c'est le sacrifice qu'il lui faut consentir, pour se prêter à un traitement vérifonctionnel. En quoi il fait souvent violence à nos modes les plus naturels de pensée, comme l'atteste, pour l'un comme pour l'autre de nos quaternes, le détournement de sens qu'il doit faire subir aux mots du vocabulaire. Car dans la langue commune, et aussi bien dans la langue littéraire, dire qu'une proposition en implique une autre signifie que la seconde est une conséquence *nécessaire* de la première; et dire que deux propositions sont compatibles ou incompatibles signifie qu'il est ou non *possible* qu'elles soient vraies ensemble. Et on notera même que c'est seulement lorsqu'il y a, entre deux propositions, une implication ou une incompatibilité en ce sens fort, que nous parlons d'une relation logique entre elles. Car avec la logique nous sommes proprement, certains diront même exclusivement, dans le domaine de la nécessité. Tandis que, toujours avec le sens modal de ces termes, la non-implication, directe ou converse, et la simple compatibilité, sont précisément l'expression de l'absence de lien logique entre deux propositions.

Au système des connecteurs assertoriques, il convient donc de superposer, même au prix de difficultés pour un traitement formel, un système de connecteurs modalisés, où soit observée avec le premier une correspondance terme à terme. Doubler donc l'implication assertorique dite « matérielle » par une implication apodictique dite « stricte » [15], qu'on symbolisera par $p \prec q$, doubler la conjonction assertorique par une conjonction simplement problématique appelée « consistance », qu'on symbolisera par $p \circ q$, etc. Seulement, on s'aperçoit bientôt que, malgré les analogies de fonction entre les connecteurs des deux systèmes, l'intervention des nuances modales transforme, quand on passe de l'un à l'autre, la structure des relations entre les divers connecteurs, de sorte qu'on ne peut se contenter de calquer le second système sur le premier.

Il est naturellement possible de disposer en forme de carré les quatre jonctions et les quatre implications modales, mais aucun de ces deux carrés ne forme un quaterne, au sens que nous avons donné à ce terme pour qu'il exprime avec précision les rapports entre ses différents postes, c'est-à-dire pour qu'il comporte une différenciation entre contraires et subcontraires, entre subalternants et subalternés. Avec les carrés modaux, en effet, seules subsistent les relations diagonales des contradictoires, remarque faite que la négation d'une apodictique donne une problématique et réciproquement. La diversification entre contraires et subcontraires s'y est effacée. Ainsi le rapport entre $p \prec q$ et $p \succ q$ ne peut être assimilé ni à un rapport entre contraires, puisque les deux formules peuvent être vraies ensemble, comme lorsqu'elles se conjoignent dans la double implication ou équivalence, ni à un rapport entre subcontraires, puisque, contrairement à ce qui se passe pour leurs correspondants assertoriques, elles peuvent aussi bien être fausses ensemble, à savoir lorsque les deux propositions p et q sont indépendantes, n'ont pas de lien logique entre elles. Et de même avec les jonctions. Il n'y a pas incompatibilité, c'est-à-dire exclusion de leur commune vérité, entre la conjonction problématique ou consistance (possibilité de $p \cdot q$) et le rejet problématique (possibilité de $\bar{p} \cdot \bar{q}$) : il est possible qu'un nombre pris au hasard soit divisible à la fois par 2 et par 3, mais possible aussi qu'il ne soit ni

15. A vrai dire, l'implication stricte de Lewis ne coïncide pas exactement, comme il l'avait cru d'abord, avec la relation de conséquence logique; elle s'en rapproche cependant beaucoup plus, en raison de son podicité, que ne fait la simple implication assertorique.

l'un ni l'autre. Et par suite les négations de ces deux connecteurs, à savoir l'incompatibilité apodictique ou inconsistance (impossibilité de $p \cdot q$) et la disjonction apodictique (impossibilité de $\bar{p} \cdot \bar{q}$) peuvent être fausses ensemble. Mais elles peuvent aussi être toutes les deux vraies : il est également impossible qu'un entier soit pair et impair, et qu'il ne soit ni l'un ni l'autre. Par suite leurs négations, qui nous ramènent à la conjonction et au rejet problématiques, peuvent être toutes les deux fausses. Cette absence de différenciation entre contraires et subcontraires a naturellement pour effet, les rapports de négation contradictoire étant maintenus, de supprimer toute différenciation entre subalternantes et subalternées.

Pour retrouver avec les connecteurs modaux notre structure quaternaire, il faut former un quaterne mixte, où se combinent jonctions et implications. Une telle combinaison, avec toutes les propriétés formelles de la structure quaternaire, eût été déjà possible avec les connecteurs assertoriques. Si néanmoins nous ne l'avons pas retenue, c'est que, quand on cherche à articuler entre eux les deux quaternes mixtes ainsi obtenus, on se voit contraint de mettre aux deux postes de liaison ces pseudo-binaires que sont les connecteurs dégénérés, et par suite de laisser échapper l'indispensable couple de l'équivalence et de l'alternative. Avec les connecteurs modaux, où l'on dispose toujours, théoriquement, de huit termes, deux configurations mixtes sont possibles, qui satisfont l'une et l'autre aux relations caractéristiques de notre structure quaternaire. Nous préférerons naturellement retenir celle qui réunit, modalisées, la conjonction et l'implication, qui nous sont apparues, en tant que cellules originaires de chacun des quaternes, comme leur pièce maîtresse; et nous négligerons celle qui les omet, tandis qu'elle accueille certains connecteurs dont la logique modale fait si peu usage qu'elle n'a pas jugé utile de leur assigner un symbole, comme c'est le cas pour les correspondants de la disjonction et du rejet. Notre quaterne se disposerait alors de la façon suivante (où les symboles de la colonne de droite se comprennent d'eux-mêmes) :

$$\begin{array}{cc} p \prec q & p \parallel q \\ p \circ q & p \not\prec q \end{array}$$

On remarquera aussitôt que, pour présenter correctement les relations caractéristiques, ce quaterne doit renverser la position de son correspondant assertorique, lequel se présenterait ainsi :

$$\begin{array}{cc} p \cdot q & p \not\supset q \\ p \supset q & p \mid q \end{array}$$

Si, dans le système modal, l'implication passe en première ligne et rejette la conjonction à la seconde, cela tient à ce que l'implication modale monte au niveau apodictique, tandis que la conjonction modale descend au niveau problématique, et que l'ordre de consécution des modales va de l'apodictique au problématique, sans réciprocité. D'où cette conséquence. Tandis que, sur le plan assertorique, la conjonction nous a paru avoir le rang prioritaire, sur le plan modal au contraire c'est l'implication qui, prenant le pas sur la conjonction, occupe la place noble. D'autres considérations, qu'il serait trop long d'exposer ici, nous paraissent d'ailleurs confirmer cette prééminence que prend, dans ce nouveau domaine, l'implication, et que méconnaissent le plus souvent les constructeurs des systèmes modaux qui, pour des raisons parfaitement valables du point de vue formel qui est le leur, prennent la consistance, conjonction problématique, comme notion première de leur système.

8

On vérifiera aisément que les quatre termes du quaterne modal mixte, ainsi renversé, soutiennent entre eux les rapports non seulement des contradictoires, mais aussi bien des contraires, des subcontraires et des subalternes. Maintenant, ce quaterne se prête-t-il à être lui aussi développé en une structure hexadique, par disjonction de ses postes A et E, et conjonction de ses postes I et O ? Avec la première de ces opérations, on obtient[16] $p \prec q \vee p \parallel q$, ce qui représente le cas de deux propositions p et q entre lesquelles il y a un lien logique de dépendance, positive ou négative : soit que l'une des propositions entraîne nécessairement l'autre, soit qu'au contraire les deux s'excluent mutuellement. Avec la seconde, on obtient naturellement la négation du résultat de la première, soit $p \circ q \cdot p \not\prec q$, ce qui représente le cas de deux propositions qui sont à la fois compatibles et indépendantes, c'est-à-dire telles que les seules ressources de la logique ne permettent pas de conclure, affirmativement ou négativement, de l'une à l'autre.

On ne s'étonnera pas si l'hexagone ainsi construit sur les connecteurs modalisés se superpose exactement à celui qui se laisse construire sur les notions modales elles-mêmes. On connaît depuis longtemps l'analogie entre le carré des quatre modalités dites aristotéliciennes (nécessaire, impossible, possible au sens de pur possible, contingent au sens de non-nécessaire) avec le traditionnel carré des quantificateurs qui sert toujours de référence. La correspondance se poursuit avec la transformation du carré en hexagone. Cette transformation a pour effet, dans le cas des notions modales, d'assigner une place précise, par l'institution d'un poste Y, à la notion de ce qui est à la fois possible et contingent; ce qui a l'avantage, d'abord de dégager explicitement une notion qui nous est, en fait, d'usage plus courant que les deux qu'elle conjoint prises séparément, ensuite et par voie de conséquence de faciliter la levée de l'ambiguïté dont souffrent les mots de possible et de contingent qui, en raison même du besoin que nous avons d'un mot pour l'idée usuelle qui les conjoint, ont tendance à osciller entre leur sens unila-

16. On admettra, pour simplifier l'écriture symbolique, que les symboles modaux lient plus fortement que ceux des connecteurs assertoriques.

téral I ou O et le sens bilatéral Y, créant ainsi des confusions et des distorsions. On pourra, pour prévenir l'amphibologie et rétablir la symétrie, qualifier d'éventuel ce qui ainsi peut être mais peut aussi ne pas être, ce qui n'est ni impossible ni nécessaire, et contenir alors les mots de possible et de contingent dans le sens unilatéral qu'ils prennent aux postes I et O, et qui permet de les distinguer nettement.

Avec les connecteurs modalisés, le même besoin se fait sentir d'une notion qui enveloppe à la fois celle de l'indépendance et celle de la compatibilité des propositions. En fait, là aussi, nous pensons le plus souvent ces notions dans leur conjonction, même si l'une des deux demeure à l'arrière-plan. De deux propositions dont l'une implique strictement l'autre, il nous paraîtra superflu de dire qu'elles sont compatibles. Nous emploierons donc en général ce dernier mot pour désigner les couples de propositions qui sont, aussi, indépendantes, même si cette dernière notion reste alors, comme c'est ordinairement le cas, sous-entendue. Là aussi, il faut éviter que les habitudes du vocabulaire nous masquent l'organisation conceptuelle authentique, ce que permet la reconnaissance expresse, du côté des problématiques, d'un troisième poste Y appelant avec lui, comme son opposé diamétral du côté des apodictiques, sa négation contradictoire en U.

Ce ne sont donc pas seulement des raisons d'analogie, ou de régularité esthétique, qui nous font organiser les connecteurs modaux en cette structure hexadique. On remarquera que le triangle des contraires AYE, loin d'être une construction artificielle, fausse fenêtre pour la symétrie d'ensemble du système, correspond exactement aux trois situations dans lesquelles, du point de vue de leur rapport logique, peuvent se trouver deux propositions : ou bien connexion nécessaire (A), ou bien exclusion nécessaire (E), ou bien ni l'un ni l'autre, c'est-à-dire possibilité d'être ou non posées ensemble(Y). Ou si, afin de ne pas laisser de côté le terme en U, l'on préfère considérer le couple de contradictoires UY, on voit que l'alternative qu'il présente est tout à fait essentielle du point de vue logique, puisque c'est précisément celle de la présence ou de l'absence d'un rapport logique entre deux propositions.

Alain Badiou

Marque et Manque : à propos du Zéro

L'épistémologie se disjoint de la reprise idéologique, où toute science vient figurer son reflet, pour autant qu'elle exclut l'opérateur institutionnel de cette reprise : la notion de Vérité, et procède selon le concept d'un mécanisme de production, dont on attend que, par différence, la théorie de sa structure rende raison de son effet.

Qu'en est-il d'une épistémologie de la logique?

La représentation de cette discipline dans le réseau des indicateurs idéologiques nous la montre étrangère au réel, discours présupposant, non la construction d'un objet, mais la position de la Vérité. C'est ce que Frege énonce abruptement lorsqu'il assimile une proposition à un nom propre dont la référence — la dénotation — est le Vrai, ou le Faux. Il en résulte que la logique ordonne incessamment autant d'écritures liées qu'il lui est nécessaire pour passer d'un invariable nom-du-Vrai à un autre : la logique est ici *l'indéfini scriptural d'un état civil de la vérité* [1].

A partir de quoi on peut en effet démontrer — entreprise de J. Lacan et J.-A. Miller — que, surnommé, le Vrai tombe en dessous de ses noms, présent pourtant dans son état civil par l'itération qui nous fait déclarer sans cesse, à sa naissance perpétuelle, ses nouveaux noms anonymes. Le mouvement nominal, la compulsion répétitive où se déploie l'impuissance à croire tenir jamais le patronyme usuel du Vrai, c'est la marque même, dans la séquence liée des propositions, de ce qui n'est qu'un manque sur quoi elle glisse sans résistance ni succès.

A ce double procès (salut du Vrai; convocation et marque du manque) nous allons objecter la stratification du signifiant scientifique.

Pour nous, *et* la représentation idéologique, par Frege, de sa propre entreprise, *et* la reprise de cette représentation dans le lexique du Signifiant, du manque et de la place-du-manque, masquent la pure essence productrice, le

1. Cf. Frege, « On sense and nominatum », in *Readings in Philosophical Analysis*, Feigl et Sellars, N. Y. 1949. (p. 85-102).

« Tout énoncé assertif, à quelque domaine qu'appartiennent les dénotations des mots qui y figurent, doit donc être tenu pour un nom propre; et sa dénotation, si elle existe, est soit le Vrai, soit le Faux. »

« Tous les énoncés vrais ont ainsi le même dénotation. »

procès de position par quoi la logique, en tant que machine, ne manque jamais de rien sinon de ce que par ailleurs elle produit.

La logique du Signifiant [2] est une métaphysique. Représentation de la représentation, procès-progrès intra-idéologique.

1. Triple articulation du processus logique

La théorie de la logique se rapporte aux modes de production d'une division dans l'écriture linéaire; soit la dichotomie d'un ensemble structuré d'énoncés « introduits » dans le mécanisme dernier au titre de matière première (déjà travaillée).

Il en résulte immédiatement que le requisit unique à quoi doit obéir le fonctionnement du mécanisme est qu'au bout du compte quelque chose soit en effet *coupé*; que des écritures soient mécaniquement réparties en deux classes disjointes, désignées, par allusion au mécanisme le plus souvent utilisé : classe des énoncés dérivables, classe des énoncés non-dérivables.

La définition classique de la *consistance absolue* d'un système : qu'au moins une expression bien formée ne soit pas dérivable dans le système, désigne précisément cette exigence minimale. Sa transgression équivaut à considérer un mécanisme logique qui ne produit rien, la production n'étant en l'occurrence rien d'autre que la division effective des matériaux sur lesquels on opère.

A y regarder de plus près, on constate que cette division finale implique l'opération successive de trois mécanismes ordonnés. Car avant d'être répartis, les syntagmes doivent être *formés*, puis *triés*, aucun système de dérivation ne pouvant les soumettre tous à son principe de division (ce qui veut simplement dire qu'une machine spécialisée possède une entrée où ne peuvent être introduits que des matériaux spécifiques, préalablement usinés).

Nous aurons donc à distinguer les mécanismes de *concaténation*, de *formation*, et de *dérivation.*

Toute dissimulation de l'autonomie du second mécanisme — par rapport au troisième — a pour effet la perte de l'essence même : la fonction productrice du processus logique [3]. Et rien n'est plus important que de parcourir dans leur ordre les machineries de la logique.

a) *Concaténation* : La matière absolument première du processus logique

2. Par logique du Signifiant, nous entendons ici le système des concepts par lesquels penser l'articulation du sujet : Manque, Place, Tenant-Lieu, Suture, Forclusion, Refente. Ces concepts ont été produits par J. Lacan, et c'est reconnaître à son égard une dette définitive que d'engager le procès de limitation de leur usage : le procès critique.

La thèse que nous soutenons va seulement à esquisser l'impossibilité d'une logique du Signifiant enveloppante au regard de l'ordre scientifique, et où s'articulerait l'effacement de la coupure épistémologique.

3. L'opérateur privilégié de cette dissimulation est le concept de sens, à quoi l'on rapporte et l'origination du Vrai (dérivabilité) et le rejet du non-sens (formation-syntaxe).

lui est fournie par une sphère particulière de la production technique, l'écriture. Il s'agit en effet d'un stock de marques graphiques, séparables et indécomposables, formant un ensemble fini ou au plus dénombrable que nous appellerons l'alphabet.

Le premier mécanisme « reçoit » ces marques dont il compose des *suites finies* (juxtaposition linéaire avec répétitions éventuelles). Il est monté pour produire toutes les suites finies de cette espèce, et ce sont donc elles que nous trouvons à la sortie du mécanisme. Soit S cette production.

b) *Formation* : Le deuxième mécanisme opère sur S, et en réalise de proche en proche une *dichotomie parfaite*, qui sépare sans reste les suites « acceptées » par la machine des suites rejetées. On appelle expressions bien formées les expressions acceptées, mal formées les autres [4].

Les opérateurs (les « pièces ») de ce mécanisme sont *les règles de formation*, qui prescrivent aux concaténations acceptables certaines configurations : par exemple, la machine dite « calcul des prédicats avec égalité » pourra accepter les suites I (x, x) et non-I $(x, x,)$ mais rejettera la suite $x(\mathrm{I}, x)$.

Par une dangereuse tolérance sémantique, on appelle souvent les énoncés rejetés des non-sens.

L'ensemble des règles de formation constitue la syntaxe.

Remarquons tout de suite que si, comme l'indique en apparence le célèbre théorème de Gödel, la dichotomie dernière (celle du troisième mécanisme) ne peut, pour une machine « forte », se faire sans reste [5] — car il y a toujours des énoncés *indécidables* —, la possibilité même de ce résultat *présuppose l'existence d'un mécanisme dichotomique sans reste* : celui qui fournit au mécanisme démonstratif sa matière première, les expressions bien formées. Les apories de la dérivation sont assignables sous la condition d'une syntaxe parfaite.

L'ordre signifiant refendu, marqué par ce dont il manque, n'est exhibé

4. Que la division soit sans reste veut dire : étant donnée une écriture quelconque (une suite finie de signes de l'alphabet), il existe un procédé effectif qui permet de déterminer *sans ambiguïté* la conformité ou la non-conformité de l'expression aux règles de la syntaxe.

Pour les logiques classiques, cette propriété syntaxique fait l'objet d'une démonstration par récurrence portant sur le nombre de parenthèses de l'expression.

Cf. S. Kleene, *Introduction to Metamathematics*, Amsterdam, 1964, p. 72 s.

5. Une machine forte est capable de répartir les écritures de l'arithmétique récursive.

Notons qu'il existe un mécanisme logique faible, mais *parfait* : le Calcul des Propositions. Ce système est en effet :

— Consistant à tous les sens du terme,

— Décidable (de toute expression bien formée, on peut savoir mécaniquement si elle est ou non dérivable),

— Complet (toute expression bien formée est, ou dérivable, ou telle qu'ajoutée aux axiomes elle rend le calcul inconsistant),

— Catégorique (tous les modèles sont isomorphes).

La seule existence de ce Calcul pose quelques problèmes à la Logique du Signifiant, car rien, fût-ce une place vide, n'y atteste un manque. Très rigoureusement, ce système ne manque de rien, ni ne marque le rien dont c'est même déjà trop dire qu'il en manque.

On peut soutenir que la perfection du Calcul des Propositions est le référent différentiel intra-logique de « l'imperfection » relative des autres systèmes.

que dans sa différence à un ordre autonome effectivement fermé, c'est-à-dire intégralement décidable (celui de la formation des syntagmes). En ce sens, on ne peut soutenir que la déchirure ou l'itération compulsive soient le prix inévitable de la fermeture. Il faut dire : l'existence d'un mécanisme fermé infaillible conditionne celle d'un mécanisme dont on puisse dire qu'il est infermable, et donc intérieurement limité.

La monstration d'une suture présuppose l'existence d'une forclusion.

Quoi qu'il en soit de cette anticipation théorique, retenons qu'à la sortie du mécanisme syntaxique, nous trouvons l'ensemble des expressions bien formées, soit E.

c) Dérivation : Le troisième mécanisme opère sur E, et il est généralement monté pour en produire :

1 : Une dichotomie parfaite, entre Thèses (ou énoncés dérivables) et non-Thèses (énoncés indérivables),

2 : Un certain type de liaison fonctionnelle entre les moitiés.

Cette deuxième condition est capitale. Si l'exigence de dichotomie était la seule, les mécanismes logiques classiques (par exemple une formalisation de l'arithmétique) n'auraient aucun défaut : il est bien vrai que tous ces mécanismes séparent sans reste les expressions bien formées en dérivables et non dérivables, en thèses (T) et non-thèses (NT) [6].

Un énoncé indécidable, comme celui que construit Gödel, n'est évidemment pas un énoncé qui ne serait ni démontrable ni indémontrable (ce qui n'aurait aucun sens). Le centre de la preuve de Gödel est au contraire atteint quand on montre que cet énoncé *n'est pas* démontrable. Il est donc bien assigné à l'une des deux moitiés.

Un énoncé indécidable n'est pas le reste d'une coupure, mais un énoncé tel que ni lui ni sa négation ne sont dérivables. Un tel énoncé est certes *irréfutable* (réfutation = démonstration de la négation). Mais il est explicitement indémontrable. Il y a bien partage sans reste entre le dérivable et le non-dérivable : mais l'énoncé de Gödel et sa négation sont *dans la même moitié*.

Tout repose ici sur un opérateur syntaxique spécial, et la structure qu'il commande, l'opérateur de négation.

6. C'est une question *différente* de déterminer si, pour toute expression bien formée, il existe un procédé mécanique (effectif) permettant de savoir « d'avance » (sans avoir à la dériver) si elle est, ou non, dérivable.

L'existence d'un tel procédé définit la *décidabilité* du système. On sait (Church, Kleene) que les mécanismes logiques assez forts sont généralement indécidables.

On ne confondra pas la *décidabilité d'un système* avec l'existence ou la non-existence d'un énoncé tel que ni lui ni sa négation ne sont dérivables. Le problème de l'existence d'un énoncé indécidable n'est pas un problème de décidabilité, mais un problème de *complétude*.

Un système peut être décidable et incomplet : il y existe alors des énoncés (indécidables) dont on peut « décider » à l'avance, par un procédé effectif, qu'ils ne sont ni dérivables ni réfutables.

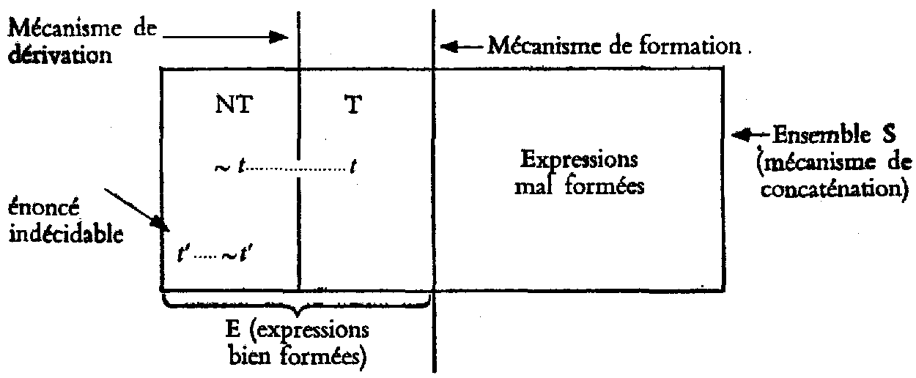
La réciproque cependant n'est pas vraie : un théorème méta-mathématique important lie les résultats d'indécidabilité (Church) aux résultats d'incomplétude (Gödel). Si un système formel (assez fort) est indécidable, alors il est ou inconsistant, ou incomplet.

On ne peut donc soutenir que le théorème de Gödel signifie : toute dichotomie laisse un reste. Ou : toute dualité implique un tiers disjoint décentré par rapport à la règle qui ordonne intérieurement chaque terme du couple. Cette lecture (fréquente) du théorème est une importation métaphysique. En réalité, le problème tient aux conditions structurales particulières imposées au troisième mécanisme logique en surcharge de sa fonction séparatrice : ce que résume ci-dessus notre condition 2).

On exige en effet qu'il y ait dans l'alphabet un opérateur (négation ou tout autre : le sens intuitif de la négation est ici un obstacle) tel que, si un énoncé appartient à une moitié ($t \in$T ou $t \in$NT) alors, l'énoncé obtenu en lui appliquant l'opérateur, soit $\sim$ [7], est dans l'autre moitié ($\sim t \in$NT ou $\sim t \in$T).

Ce qui est ici originairement en question n'est pas la coupure comme telle, mais une fonction de liaison entre les moitiés séparées. La limite gödélienne ne s'attache pas à la dichotomie. Elle concerne au contraire l'unité-de-correspondance des parties disjointes.

L'énoncé de Gödel signifie : soit la liaison fonctionnelle qui rapporte tout énoncé à sa négation : $t \cdots \sim t$. Il n'y a pas de dichotomie effective telle que *toutes* ces liaisons soient coupées.



Sans doute peut-on espérer chasser *de T* (énoncés dérivables) toutes les liaisons $t \ldots \sim t$; sans quoi le système serait inconsistant. Mais on montre alors qu'il en reste toujours dans NT : précisément celles qui concernent les énoncés indécidables.

Nous avons donc à considérer ici une déchirure de structure, et non une dichotomie. La clé de la limitation tient paradoxalement à ce qu'on impose au mécanisme séparateur de *n'être pas* parfait : de préserver le concept d'un *rapport* réversible entre les moitiés. De sorte que la limitation, loin d'attester que figure dans un espace produit par division la trace de la déchirure dont il résulte, montre plutôt qu'on n'y peut produire indéfiniment le signe de l'autre; qu'en certains lieux, la trace est effacée; qu'un mécanisme

7. Conformément à l'usage, nous noterons $\sim$, dans tout le reste de cet exposé, le foncteur de négation.

fort impose une division complète dans le rejet qu'elle fait, en chacune de ses parts, de certaines marques du vieux Tout.

L'indécidable n'est pas la suturation du manque, mais *la forclusion de ce qui manque* par l'échec à produire, dans le dérivable, tout le non-dérivable en tant que nié.

La limitation signifie : il existe en un point, entre les parties T et NT, une *distance sans concept* : celle qui fait figurer, dans l'espace des non-thèses, un énoncé dont la négation ne s'inscrit pas dans l'espace des thèses, et qui est donc non-rapporté à cet espace. Le théorème de Gödel est le lieu de plus grande efficace de la séparation, non le lieu de son échec [8].

Si donc les théorèmes de « limitation » résultent des conditions d'imperfection assignées au mécanisme dichotomique, il nous faut remanier le concept de ce dernier pour y intégrer ces conditions. Nous dirons :

La logique est un mécanisme triplement articulé (concaténation, syntaxe, dérivation) qui produit une division terminale dans l'écriture linéaire, et qui est tel qu'étant donné un syntagme convenable on doit pouvoir :

i) Le distribuer dans une des deux moitiés (T ou NT)

ii) Construire un syntagme mécaniquement obtenu à partir du premier par adjonction d'un foncteur (généralement nommé négation), et tel que si le premier est dans une moitié, le second est dans l'autre.

La condition i est idéalement [9] satisfaite par les mécanismes classiques (théorie des ensembles ou formalisation de l'arithmétique). La seconde ne l'est que par des mécanismes faibles : un mécanisme fort coupe *trop bien*.

2. Nullité de la chose - Identité des marques

La description du mécanisme logique nous autorise à questionner la construction en ce domaine du concept de suture, et nous permet de déterminer exactement la fonction méta-théorique du zéro.

Annonçons dès l'abord nos thèses :

1) Le concept d'identité n'a valeur que pour les marques. La logique n'a nulle part à connaître d'une *chose* identique à soi, fût-ce au sens où la « chose » serait l'objet du discours scientifique.

2) Le concept de vérité est un indicateur idéologique, résumant-dissimulant des concepts scientifiques de sélection et de division. Il désigne globalement un mécanisme différencié.

3) Le zéro n'est pas dans un système *la marque du manque*, mais le signe

8. Quant à y déchiffrer le hiatus entre l'intuition et le formalisme, nous ne nous y risquerons pas. Sur ce point, voir notre appendice sur la démonstration de Smullyan, et notre critique du concept de limitation.

9. « Idéalement » puisque, s'il est vrai que toute expression bien formée est dans T ou dans NT, l'existence d'un procédé « effectif » (récursif, algorithmique) permettant de déterminer dans laquelle de ces deux classes elle figure, est souvent démontrée impossible. C'est le problème de la décidabilité *du système* (cf. note 6).

où s'abrège *le manque d'une marque*. Ou plutôt : l'indication, dans un ordre signifiant, de ce qu'une écriture est présente dans la moitié rejetée d'un autre ordre.

4) Le signifiant logico-mathématique n'est suturé qu'à lui-même. Il est indéfiniment *stratifié*.

5) En logique, tout manque qui *n'est* pas un signifiant *n'a* aucun signifiant : il est forclos.

6) Le concept de suture n'articule pas sur le manque le signifiant en général. Sa pertinence requiert une condition spécifique dans le signifiant. Et cette condition n'est pas construite par la psychanalyse, mais par le matérialisme historique : seul le signifiant *idéologique* est suturé.

Les discussions par J. A. Miller de Frege [10] comme de Boole, par Lacan du théorème de Gödel ou de la sémantique de l'implication, ont cette ambiguïté qu'elles déploient simultanément, et sans distinction, ce qui relève de la construction effective d'un mécanisme logique, et ce qui relève du discours (idéologique) par quoi les logiciens se représentent cette construction.

Ainsi faut-il se garder de comprendre *à l'intérieur* du procès logique toute retraduction de l'instance articulatoire des signes dans le lexique de la subsomption. Cette notion, close dans la relation référente (spéculaire), comme d'ailleurs celle, connexe, de dénotation, dissimule l'essence strictement fonctionnelle des renvois intérieurs au mécanisme logique.

Rien ici n'autorise la détermination d'un *objet*. La chose y est nulle : aucune écriture ne peut l'objectiver.

On ne peut trouver dans cet espace mécanique que des *fonctions* réversibles de système à système, de marque à marque : des dépendances mécaniques de mécanismes. La sémantique elle-même n'entre dans la logique que pour autant qu'elle travaille entre deux ordres signifiants logico-mathématiques, et sous la condition que les fonctions de correspondance entre ces ordres soient elles-mêmes logico-mathématiques [11].

La chose ni l'objet n'ont pas chance d'accéder ici à plus d'existence que leur exclusion sans traces.

Il en résulte que l'exigence leibnizienne d'identité-à-soi, dont dépend que la vérité soit sauve, n'est intra-logique (théorique) que si elle concerne l'identité des marques. Elle postule, par une confiance inaugurale en la permanence des graphies, l'existence d'une application « identique » de l'ordre signifiant sur lui-même, qui en préserve la structure.

10. Cf. « La Suture », in *Cahiers pour l'analyse*, n° 1.

11. Church a selon nous raison d'identifier en dernière instance la Sémantique et le Syntaxe (Cf. *Introduction to mathematical logic*, Princeton 1956, p. 65 : « L'assignation de dénotations et de valeurs aux expressions bien formées peut consister en correspondances abstraites; leur traitement appartient alors à la syntaxe théorique. »)

La Sémantique ne devient *logique* (scientifique) que si elle est *la syntaxe de la différence des syntaxes*.

C'est au demeurant la science entière qui tient l'identité-à-soi, non pour un prédicat de l'objet, mais pour un prédicat des marques. La règle vaut certes pour les *faits d'écriture* de la Mathématique. Elle vaut tout aussi bien pour les *inscriptions d'énergie* de la Physique. Comme l'a admirablement montré Bachelard, la seule règle de substitution proprement physique concerne les opérateurs artificiels : « Le principe d'identité des appareils est le véritable principe d'identité de toute science expérimentale [12]. » C'est l'invariance technique des traces et des instruments qui se soustrait à toute ambiguïté dans les substitutions.

Ainsi déterminée, la règle de l'identité-à-soi ne souffre aucune exception, et ne tolère pas l'évocation, même rejetée, de ce qui s'y dérobe. Le non-substituable à soi-même est un impensé radical, dont le mécanisme logique *ne porte pas trace*. Impossible d'en produire l'évanescence, l'oscillation miroitante, comme chez Frege de la chose non-identique à elle-même fantomatiquement (idéologiquement) convoquée, puis révoquée, aux fins d'assignation du zéro. Le non-substituable à soi-même est forclos sans recours ni marque.

Cependant on construit dans les systèmes logiques un prédicat homonyme : il existe des « calculs de l'identité », où se marque la non-identité.

Pour éviter les glissements de langage, nous conviendrons de nommer « égalité » ce prédicat, noté $I(x, y)$ (qui se lit d'ordinaire : x est identique à y).

L'homonymie usuelle dissimule, nous allons le montrer, un rapport de présupposition qui fait apparaître une fois de plus la priorité du forclos.

Si l'on considère par exemple un calcul du premier ordre (où il est impossible de quantifier les prédicats), on définira implicitement la *constante* prédicative d'égalité I par deux axiomes [13] :

— $I(x, x)$ (Reflexivité totale)

— $I(x, y) \supset [A(x) \supset A(y)]$

On pourrait croire que l'axiome de reflexivité thématise dans les écritures du calcul (à la sortie du mécanisme syntaxique) l'identité-à-soi fondatrice d'une lettre quelconque. Il n'en est rien : ce que nous avons convenu d'appeler l'égalité-à-soi d'une variable *n'est pas* l'identité à soi de toute marque. La meilleure preuve en est que cette égalité admet la construction de sa négation : $\sim I(x, x)$ est une expression bien formée du système, une expression lisible.

On aurait cependant tort d'imaginer que $\sim I(x, x)$ (à lire : x n'est pas égal-ou identique-à soi) *marque* dans le système, place dans le mécanisme, l'impensable non-identité-à-soi du signe, et qu'une telle expression (correcte) organise la suturation au calcul de cet impensable. Au contraire l'existence

12. *Activité rationaliste de la Physique contemporaine*, p. 5.

13. Dans un calcul du deuxième ordre, où l'on peut quantifier les prédicats, l'égalité serait définie explicitement, selon l'instance leibnizienne des indiscernables, ici restreinte à l'ordre des signes : deux variables d'individu qui tombent, sans exception, sous les mêmes prédicats, sont partout substituables, rien ne marquant leur différence. Avec les notations classiques :

$$I(x,y) =_{\mathrm{df}} (\forall a)[a(x) \supset a(y)]$$

signifiante de $\sim \mathrm{I}(x, x)$, loin de marquer l'impensé, suppose son fonctionnement *sans marque ;* il faut *qu'on ne puisse* pas penser que x, en tant que marque, est « autre » que x, même marque autrement placée, pour que soit logiquement produit cet énoncé. La simple convocation-révocation d'une non-identité à soi de x, le miroitement de son autodifférence, suffira à anéantir l'existence scripturale du calcul entier, et tout spécialement des expressions, comme $\sim \mathrm{I}(x, x)$, où x est en double occurrence.

La production du concept logique d'égalité et de non-égalité à soi présuppose la forclusion du non-identique à soi scriptural. Le manque de l'égal s'édifie sur l'absence *absolue* du non-identique.

Sans doute la structure d'un calcul de l'identité implique-t-elle généralement la dérivation de la thèse : $\sim \mathrm{I}(x, x)$: il est faux que x ne soit pas égal à x. Mais cette « négation », en fait de manque, ne marque rien d'autre que le rejet (la présence) dans l'autre moitié (celle des non-thèses) de l'énoncé $\sim \mathrm{I}(x, x)$, produit identiquement par le mécanisme syntaxique. Aucune absence n'est ici convoquée qui ne soit la distribution dans une classe plutôt que dans sa complémentaire, et selon les règles positives d'un mécanisme, de ce que ce mécanisme reçoit des productions d'un autre.

Ce qui nous permet de rapporter sans infiltration idéologique le concept d'identité au concept de vérité.

Rien n'y transpire de la chose, ni de son concept.

Mais « la vérité est », pure désignation commode d'un complexe opératoire, signifie, s'il faut y pointer l'identité et l'égalité :

Identité : La logique soutient ce rapport à l'écriture qu'elle n'en peut recevoir que les marques attestées dans la chaîne comme partout substituables à elle-mêmes. Au vrai, n'importe quelle marque, dont il appartient à la technique (extérieure) des graphies de fonder l'invariable reconnaissance.

Égalité : Il existe un ordre signifiant (un mécanisme de dérivation) dont les contraintes sélectives sont telles que sont distribués dans des moitiés différentes les énoncés $\mathrm{I}(x, x)$ et $\sim \mathrm{I}(x, x)$.

Si l'on veut considérer, dans une perspective plus proprement logistique, que la production du mécanisme-3 est l'ensemble des thèses dérivables, on dira : le mécanisme est monté de telle sorte qu'y soit produit $\mathrm{I}(x, x)$ et rejeté $\sim \mathrm{I}(x, x)$.

Ces deux écritures cependant sont antérieurement produites dans *la même moitié* (celle des expressions correctes) par un mécanisme-2 (une syntaxe). A partir de quoi seulement on peut donner sens au rejet de l'une d'entre elles par le mécanisme de dérivation.

Le non-égal-à-soi n'est ici exclu que sous la condition d'avoir à se placer dans un ordre signifiant autonome, sédimentairement organisé « en dessous » de celui qui ne lui fait plus place.

Préserver à tout prix, en ce point, la corrélation de l'égal à soi et du vrai reviendrait à dire : la vérité, c'est le système des contraintes qui différencient le mécanisme-3, produisant le seul énoncé $I(x, x)$, du mécanisme-2, où sont produits simultanément $I(x, x)$ et $\sim I(x, x)$.

L'égal-à-soi comme salut de la vérité se réduit à n'être qu'une différence, par effet retiré, entre syntaxe et dérivation : entre matière première et produit. Plus exactement : entre deux mécanismes de sélection dont le second est plus fin que le premier.

3. Marque du manque, ou marque manquante ?

Nous pouvons désormais risquer le Zéro.

Introduit par voie de définition, le zéro est un symbole abréviateur, valant pour une écriture produite par un mécanisme-2 [14]. Il s'agit d'une *abstraction* (d'une construction de prédicat à un argument) sur relation.

Adoptons provisoirement le langage « ensembliste » de Frege.

Étant donnée une relation quelconque entre variables d'individu, soit $R(x, y)$, on peut construire la classe des x qui satisfont $R(x, x)$, et considérer l'appartenance à cette classe comme une propriété, un prédicat : le prédicat « être lié à soi-même par la relation R ». On a ainsi procédé à *l'abstraction de la reflexivité sur la relation R.*

Convenons de noter $Ar \cdot R$ le nouveau prédicat. $Ar \cdot R(x)$ « signifie » : x a la propriété d'être lié à soi-même par la relation R.

Ces considérations, qui reposent sur un concept « intuitif » de la classe, doivent maintenant être abandonnées, car elles sont étrangères au mécanisme logique : elles concernent la pédagogie idéologique du système.

En vérité, nous disposons simplement d'une règle syntaxique inhérente à un M_2, qui nous permet :

a) De construire, à partir d'un prédicat à *deux* variables (soit R), l'écriture acceptée $Ar \cdot R$.

b) De traiter cette écriture exactement comme n'importe quel autre prédicat à *une* variable (ce qui nous autorise par exemple à écrire $Ar \cdot R(x)$ etc.).

L'abstraction est donc ici une règle permettant la formation mécanique d'un prédicat à un argument à partir d'un prédicat à deux arguments.

Cette abstraction peut naturellement opérer sur la relation $I(x, y)$, dite relation d'identité. Comme un axiome du calcul de l'identité est précisément $I(x, x)$, le M_3 de ce calcul dérivera trivialement l'énoncé $(\forall x)\ (Ar \cdot I(x))$, soit : tout x est lié à lui-même par la relation I.

Mais l'abstraction de reflexivité peut aussi bien être faite sur la relation de non-égalité : $\sim I(x, y)$, puisque cette écriture est produite par M_2.

On obtient ainsi *une* des définitions possibles du *prédicat zéro.*

$$0 = Ar \cdot \sim I$$

14. Nous noterons désormais M_1, M_2 et M_3 les mécanismes de concaténation, de syntaxe (du calcul des prédicats) et de dérivation (*idem*).

$o(x)$ pourra se lire : x est un zéro; il a la propriété de n'être pas égal à soi-même.

Satisfaire $o(x)$ — être un zéro — n'empêchera nullement le signe x, comme le signe o, d'être partout substituables à eux-mêmes : identiques, ils le demeurent, si même ils supportent, ou nomment, la non-égalité (identité) à soi [15].

Dire qu'ainsi défini le zéro « vise » un objet non-identique à soi, ou qu'il est le prédicat du vide, convoque au point où ne se tiennent que des substitutions d'écritures la lecture métaphysique de l'Être et de son Plein.

Car l'écriture $\sim I(x, x)$ ne se tient à la place de rien d'autre, ni ne marque la place d'un rien.

Quant au zéro, il vient partout où se tient ce à quoi il équivaut par convention scripturale, soit $Ar \cdot \sim I$. Il est construit positivement par M_2.

Appelons mécanisme-4 un système logique qui adjoindrait à M3 la *constante* prédicative (le nom propre) o, telle que ci-dessus définie. De quel manque cette adjonction pourrait-elle être la marque dans l'ordre signifiant ainsi désigné ?

M3, nous l'avons vu, *rejette* l'écriture $\sim I(x, x)$, et *dérive* l'écriture $I(x, x)$. Ne faut-il pas considérer que le prédicat zéro *marque* dans le non-rejeté de M4 ce qui a été rejeté dans M3 ? N'est-il pas le prédicat satisfait par « aucun » terme ?

Au vrai, ces descriptions sont étrangères à la théorie logique. Le zéro est simplement une écriture acceptée par M2 et introduite, assortie de certaines règles d'emplois, dans M4.

Si l'on veut cependant penser le lien du zéro à la non-figuration de $\sim I(x, x)$ dans la dérivation de M3, il y faut un usage quelque peu allégorique des concepts. Mais il est recevable de dire : Le zéro marque dans M4 (sous forme prédicative), non le *manque d'un terme* à satisfaire la relation, mais une *relation manquante* dans M3 : la relation $\sim I(x, x)$. Il faut ajouter aussitôt : si la relation peut manquer dans M3, c'est *en tant qu'elle figure dans M2*.

Jeu d'apparitions et disparitions entre ordres signifiants successifs et jamais exposé à la convocation d'un manque dans l'objet ni la chose.

Système de différences entre systèmes, réglé par des substitutions, des

15. On s'étonnera peut-être de ce que nous construisions ici le zéro, non comme un terme, mais comme un *prédicat.*

Mais c'est à J. A. Miller qu'il faut poser la question relative à la reprise qu'il fait de l'indistinction où Frege maintient variables d'individu et variables prédicatives. Pour Frege, certes, un prédicat est un terme. Mais cette position est intenable, car elle donne lieu au paradoxe de Russell, qui devait précisément ruiner l'arithmétique formelle de Frege.

Or, le texte de Miller n'intègre pas à son *usage métathéorique* de la construction du nombre *l'inconsistance théorique* de cette construction. De là une incertitude épistémologique, dissipée seulement si on distingue, à chaque *mention* du texte (mêlé) de Frege, son niveau de fonctionnement. Soit :

a) Un effort théorique de construction des cardinaux finis.

b) Les erreurs théoriques dans cet effort (non-stratification des variables).

c) La re-présentation idéologique du théorique (dénotation, concept, nombre du concept, etc.)

d) La re-présentation idéologique des erreurs théoriques (théorie du zéro).

équivalences et des retraits : *marque manquante, jamais marque du manque.*

Ce n'est pas un blanc dont le zéro nomme la place, mais la *biffure d'une trace* : il laisse visible sous sa marque ($Ar \cdot \sim I$) *l'autre* marque ($\sim I(x, x)$) telle que rejetée par la dérivation.

Le zéro est la marque (dans M4) d'une marque (dans M2) manquante (dans M3).

En deçà de la chaîne signifiante, si elle est scientifique, il n'y a jamais que d'autres chaînes. Si le signifiant se suture, c'est à soi. C'est de soi qu'il manque à chacun de ses niveaux : il règle ses manques sans sortir de soi. Le signifiant scientifique n'est pas suturé ni refendu, mais stratifié [16]. Et la stratification révoque l'axiome par quoi Miller, dans un autre texte [17], caractérise la forclusion : le manque d'un manque est encore un manque. Non, si ce qui vient à manquer fut toujours déjà marqué : dès lors l'interstice est assez nommé par la différence productrice des strates. Les *points d'arrêt* sont toujours prescrits.

4. Le supplice de la philosophie

Faut-il donc annuler le concept de suture? Il s'agit au contraire de lui prescrire sa fonction en lui assignant son domaine.

De ce qu'un ordre signifiant, la science, existe, stratifié, tel qu'aucun manque n'y est marqué qu'on ne puisse découvrir marque lui-même dans l'ordre sous-jacent dont se différencie le premier, résulte l'exception. La science ne tombe pas sous le concept de la logique du signifiant. Au vrai, c'est de n'y pas tomber qui la constitue : la coupure épistémologique doit être pensée sous les espèces irreprésentables de la dé-suturation.

En sorte qu'*il n'y a pas de sujet de la science.* Stratifiée à l'infini, réglant ses passages, la science est l'espace pur, sans envers ni marque ou place de ce qu'elle exclut.

Forclusion, mais de rien, on la peut dire psychose d'aucun sujet. Donc de tous; universelle de plein droit, délire partagé, il suffit de s'y tenir pour

16. Les calculs ramifiés (les diverses instances de la théorie des types) tentent le rabattement de la stratification sur une seule strate, la construction d'une *logique de la stratification* qui « exprimerait » la *stratification de la logique.*

L'inévitable axiome de *réductibilité* désigne un certain échec de cette tentative (cf. par exemple W.V.O. Quine, « On the axiom of reducibility » in *Mind* 45, p. 498-500).

Le système « expansif » Σ de Hao Wang est plutôt un *parcours constructif* de la stratification. Il n'en est pas moins exposé à de considérables difficultés relatives à la construction des ordinaux (Cf. par exemple Hao Wang, *A survey of Mathematical Logic.* p. 559 s, surtout p. 643, Pekin, 1964).

Nous sommes pour notre part convaincu que la multiplicité stratifiée du signifiant scientifique, inhérente au procès de production de la science, est irréductible à un seul de ses ordres. L'espace des marques ne s'y laisse pas projeter sur un plan. Et ce n'est là une résistance (une limitation) qu'au regard d'un vouloir *métaphysique.* Le vouloir scientifique est la transformation-parcours de l'espace stratifié, non son rabattement.

17. J. A. Miller, « L'action de la structure », *Cahiers pour l'Analyse,* 9.

n'être plus personne, anonymement dispersé dans la hiérarchie des ordres.

La science est le Dehors sans point de cécité [18].

Réciproquement, la structure signifiante définie par la suturation sera désignée dans sa particularité (elle place le manque), et d'abord comme non-science. La suture ainsi n'est pas un concept du signifiant en général, mais la propriété caractéristique de l'ordre signifiant où vient se barrer un sujet. Nommément, *l'idéologie*.

Il y a toujours un sujet de l'idéologie, car telle est la marque même à quoi elle se reconnaît. Place du manque, refente du fermé : concepts à partir de quoi construire la loi de fonctionnement du discours idéologique.

Qu'on mesure ce qui est ici en question : l'articulation possible du Matérialisme historique et de la Psychanalyse, le premier produisant la Topique d'ordres signifiants particuliers (les idéologies), la seconde les structures de leur efficace, les lois d'entrée et de connexion par quoi les places que l'idéologie distribue sont finalement occupées.

Si le Matérialisme historique prétend à lui seul élucider l'asservissement subjectif aux idéologies; ou si la psychanalyse efface dans la généralité d'une logique du signifiant la spécificité du lieu où elle doit repérer la marque du manque; alors ces disciplines sont pliées l'une à l'autre, rabattues l'une sur l'autre. Non stratifiées : non scientifiques.

Il importe donc d'affirmer que de la science la psychanalyse n'a *rien à dire*, si même des scientifiques, qui y sont asservis, elle peut beaucoup nous apprendre. Par ce silence, elle détermine négativement le signifiant dont elle parle et où elle articule le Désir. Le matérialisme historique redouble positivement cette détermination en produisant la configuration structurale où prend place l'instance idéologique.

Dès lors, poser que la différence science/idéologie puisse être effacée dans une logique de l'itération oscillante, et nommer un sujet de la science, c'est interdire que puissent se conjoindre, dans leur disjonction même, Marx et Freud.

Exhiber le concept de suture en l'endroit même de son inadéquation (la mathématique); et, mettant à profit le rabattement, par les savants, de la re-présentation (idéologique) de ce qu'ils font sur ce qu'ils font (une science), conclure à la légitimité de ce concept pour l'universel des discours, c'est réfléchir la science dans l'idéologie : la dé-stratifier pour lui prescrire son manque.

18. Si l'on se propose d'exhiber l'écriture comme telle, et d'en absenter l'auteur; si l'on veut obéir à Mallarmé enjoignant à l'œuvre écrite d'avoir lieu sans sujet ni Sujet, il existe un moyen radical, séculaire, et exclusif de tout autre : l'entrée dans les écritures de la science, dont telle est justement la loi.

Lorsqu'en revanche une écriture littéraire délectable sans doute, mais surchargée à l'évidence des marques de tout ce qu'elle nie, nous arrive à l'enseigne de ce qui se tient tout seul dans le Dehors scriptural, nous *savons* d'avance (c'est là un problème décidable...) qu'elle exhibe *l'idéologie* de la différence, et non son procès de réalité.

Les écrivains, s'ils répugnent à se convertir aux mathématiques, doivent s'en tenir dans leurs programmes à l'honorable principe de leurs productions : d'être *l'idéologie montrée*, et par là, quoique autonome, irréductiblement suturée.

Appelons « philosophie » la région idéologique spécialisée dans la science : chargée *d'effacer* la coupure en *montrant* le signifiant scientifique comme paradigme régional du signifiant-en-soi : rapport de Platon à Eudoxe, de Leibniz à Leibniz, de Kant à Newton, de Husserl à Bolzano et Frege; peut-être de Lacan à la Logique mathématique.

La science, nous l'avons indiqué, est ce qui n'est rapporté qu'à soi, le dehors multiple. Aucun ordre signifiant ne peut envelopper les strates de son discours.

De là l'impossibilité récurrente de la philosophie, dont l'historicité polymorphe atteste qu'en elle joue bien la loi de l'idéologie : la philosophie véhicule et insiste la marque de son manque.

Et que lui manque-t-il? L'effacement de la coupure suppose la construction intra-philosophique d'un concept de la science. La philosophie est astreinte à marquer, dans son ordre propre, le signifiant scientifique comme espace *total*. Mais la science, indéfiniment stratifiée, forclusion multiple, différence de différences, ne peut recevoir cette marque. La multiplicité de ses ordres est irréductible [19] : ce qui, dans la philosophie, s'énonce comme science, est inévitablement *le manque* de la science. Ce dont la philosophie manque, et à quoi elle se suture, est son objet même (la science), en elle cependant marqué par la place qu'il n'y occupera jamais.

C'est en toute rigueur qu'il est possible d'avancer que *la science est le Sujet de la philosophie*, et ce précisément parce qu'il n'y a pas de Sujet de la science.

Soit à dire, reprenant l'invocation de Leibniz : pour que l'idéologie soit sauve (comprenons : la classe dominante), doit y être *placée* l'infermable ouverture qu'y déchire la science. La philosophie s'accomplit dans ce placement.

C'est pourquoi la science et la pratique de la science mettront toujours la philosophie au supplice. Convoquant le multiple à son auto-suffisance, le jeu scientifique nous réjouit par l'enseignement de sa non-présence (sinon sous les espèces de ce qu'y induit son manque) dans le discours philosophique. Par la science nous apprenons qu'*il y a* du non-suturé, du forclos où le manque même ne manque pas, et qu'à nous déployer le contraire, sous la figure de l'Être qui se ronge, et que hante la marque du non-être, la philosophie s'épuise à maintenir en vie sa production suprême et particulière : Dieu ou l'Homme, selon les cas.

Spinoza l'avait catégoriquement affirmé [20]. Tout aussi bien Lautréamont,

19. Ce qui ne veut évidemment pas dire que des « synthèses » régionales, des transferts, des intrications, soient impossibles. L'histoire des sciences pense la *connexité locale* des strates, et la stratification de cette connexité.

La grandeur d'A. Comte n'en demeure pas moins d'avoir aperçu qu'en dépit des déplacements et intersections qui pouvaient s'y produire, la multiplicité et la hiérarchie dans l'ordre signifiant étaient des propriétés inhérentes au concept de la scientificité.

20. Texte célèbre, Livre I, appendice. L'homme n'aurait jamais transgressé l'illusion s'il n'y avait eu ce *fait* surprenant : les mathématiques.

prononçant avec quelque gourmandise sacrée l'éloge des mathématiques : « O mathématiques sévères, je ne vous ai pas oubliées, depuis que vos savantes leçons, plus douces que le miel, filtrèrent dans mon cœur, comme une onde rafraîchissante » (*Maldoror*, Chant deuxième).

Car Lautréamont, livrant la clef de son enthousiasme, ajoute superbement : « Sans vous, dans ma lutte contre l'homme, j'aurais peut-être été vaincu. »

Dans les mathématiques en effet, rien ne manque qui ne soit déjà signifiant : marques substituées indéfiniment à elles-mêmes dans la complication de leur errance enchevêtrée.

La science est le véritable archi-théâtre de l'écriture : traces, traces biffées, traces de traces; mouvement où jamais nous ne nous exposons à rencontrer cette détestable figure de l'Homme : le signe du rien.

Janvier 1967

Appendice

Le théorème de Gödel et la chaîne d'alternance science-idéologie

Au regard de quelles tentatives le théorème de Gödel peut-il être assigné comme *limitation* ? Deux, essentiellement.

I) Celle — métaphysique — qui, par Hilbert, enjoint au système formel de se fermer sur l'énoncé intérieur de sa propre cohérence.

La mathématique, soumise à cette ordonnance, n'exposerait plus le savoir à la béance indéfinie où elle étage ses ordres signifiants : sous les espèces, comme dit Husserl, d'un système nomologique, elle proposerait aux maléfices constituants de la philosophie un langage clos, unique, auto-normé, et venant, de lui-même immobile, effacer la blessure qu'ouvre historiquement dans la trame idéologique le *fait* de la science.

Contraindre le signifiant scientifique à occuper de son propre aveu la place où s'occulter, assez joli tour, auquel, cependant, ce signifiant se dérobe. On verra pourquoi.

II) Celle qui prétend épuiser, dans la reconstruction intégralement maîtrisée d'un système logistique, ce qui d'ailleurs se présente selon l'opacité résultante d'une histoire : disons l'arithmétique « intuitive ».

De la première exigence, nous avons dit ce qu'il fallait penser. Elle illustre admirablement l'échec *de la philosophie* à prescrire aux écritures de la mathématique fût-ce l'unité d'un espace d'existence. Elle éprouve la résistance de la stratification aux schèmes de fermeture que, pour son propre salut, la philosophie tente de lui imposer.

Ainsi des pythagoriciens, architectes métaphysiques du Nombre, pour qui la diagonale du carré représenta en son temps la limitation : limitation corrélative d'une *attente* qu'ordonnait la position du nombre entier dans l'illimité opératoire d'un Principe. C'est cette illimitation principielle dont le déjeté de l'irrationnel, fixant la différence d'une autre strate, attesta la signification extra-mathématique : idéologique.

Occasion d'affirmer qu'il n'y a pas, qu'il ne peut y avoir de crise *dans* la science, car la science est l'affirmation pure de la différence.

Qu'en revanche une crise *dans la représentation* (idéologique) de la science puisse induire un remaniement (positif) de la science même, ne saurait surprendre, puisque le matériau de la science est, *en dernière instance*, l'idéologie, et qu'une science « a priori » se définit de n'avoir affaire, dans l'idéologie, qu'à ce qui l'y représente : science se coupant incessamment de sa propre indication dans l'espace re-présentatif.

Reste à parler du « hiatus » qu'on repérerait entre Formalisme et Intuition, le premier échouant à dériver tout le vrai de la seconde.

Notons d'abord que l'intuitif considéré doit être défini comme l'état historique d'une science, dans l'enchevêtrement reçu, habité, de son épaisseur; la circulation licite, adhérente, de ses écritures.

Le problème rapporte donc un artifice scriptural entièrement codé à l'immanence d'un discours historico-institutionnel, qui vit de ce que l'exercice et le temps y autorisent des abréviations, des demi-mots, et le ponçage univoque d'une masse inoffensive de signifiants « normaux ».

Notons aussi que le paradoxe dont use implicitement Gödel est présent dans le langage ordinaire sous l'antique enseigne du Menteur : énoncé qui s'épuise à énoncer sa propre fausseté.

Aussi bien la « limitation » revient à la possibilité de construire, dans un langage formel, un *prédicat de la non-dérivabilité* (soit $\sim$ D) et à appliquer ce prédicat à un *représentant* de l'énoncé formé par cette application même. Soit $\sim$ D(n) où n, en un sens qui fait la preuve, « représente » $\sim$ D(n).

Le théorème de Gödel exprime donc, bien plutôt qu'un hiatus, la *reprise*, dans la transparence architectonique du système, de quelques ambiguïtés produites dans le langage par le concept (idéologique) de Vérité. Le Dérivable, si on prétend lui faire subsumer le Vrai, fonctionne comme ce dernier en chausse-trappe à la jointure insaisissable de la science et de son dehors.

Théorème, donc, de *fidélité* du formalisme aux stratifications et connexités qui sont à l'œuvre dans l'histoire des sciences, pour autant qu'elles en *expulsent* tout usage principiel (illimité) du Vrai.

Encore faut-il, pour le savoir, s'y exercer. Nous allons donner à cette fin une démonstration largement intuitive, mais complète et rigoureuse, du noyau significatif d'un théorème de limitation.

Cette démonstration est empruntée à R. M. Smullyan, *Theory of formal Systems*, Princeton, 1961.

La préoccupation pédagogique domine notre exposé : en principe, la preuve ne requiert *aucune* connaissance mathématique particulière, ce qui ne veut pas dire qu'on puisse la lire distraitement.

L'exposé proprement dit est accompagné de commentaires entre parenthèses, qui sont, de cet exposé, le redoublement sémantique, et le plus souvent dangereusement idéologique. Leur fonction est didactique.

Les rares notations accompagnées d'un !! ne sont pas nécessaires à l'intelligence de la déduction, mais la suturent au discours des lecteurs qui, sachant un minimum de mathématiques, seraient tentés légitimement d'anticiper sur ma lenteur.

Voici la structure de la démonstration :

I) *Description du système.*
   1) mécanisme-2;
   2) numérotation des écritures produites par le M-2 (fonction g);
   3) fonction de représentation (fonction φ);
   4) mécanisme-3;
   5) consistance.

II) *Lemme de diagonalisation.*
   1) diagonalisation et classes $W^\star$;
   2) énoncés de Gödel;
   3) représentation d'une classe de nombres par un prédicat;
   4) lemme de diagonalisation.

III) *Condition d'existence d'un énoncé indécidable.*

(Dans la suite, le rappel d'un résultat se fera selon ce tableau : si par exemple on évoque la condition de consistance, on notera : (I,5).)

I

1) *Mécanisme-2.*

Désignons par E la production d'un mécanisme-2 (d'une syntaxe), soit l'ensemble des expressions bien formées d'un système logique.

Nous supposerons que figurent dans cette production, parmi d'autres écritures :
— Des prédicats p, dont l'ensemble sera appelé P.
— Des énoncés fermés, dont l'ensemble sera appelé S.

(*Remarquons dès à présent que ces appellations concernent la lisibilité sémantique de la démonstration. On pourrait se contenter des données purement ensemblistes* ; E, $P \subset E$, $S \subset E$.)

2) *Numérotation des expressions.*

Nous allons maintenant nous donner l'ensemble des nombres entiers, soit N, dans son acception « intuitive » : tel qu'y peut circuler tout héritier de la tradition arithmétique : 1, 2, 3, et le reste.

Et nous allons supposer que nous avons numéroté toutes les expressions de E. Autrement dit, qu'à toute écriture $e \in E$, correspond un nombre entier, noté $g(e)$; nous supposons en outre qu'inversement tout nombre entier est le correspondant d'une expression de E, et d'une seule.

!! Nous posons donc l'existence d'une application bi-univoque g de E sur N.

(*Cette étape est essentielle ; elle inscrit les écritures de* M-2 *comme infini* dénombrable. *Si en outre notre système « formalise » l'arithmétique, il pourra « parler » de ses propres écritures, en « parlant » des nombres qui correspondent à ces écritures par la fonction de numérotation.*)

3) *Fonction de représentation.*

(Nous voulons maintenant donner sens à l'idée que notre système est fort : qu'il opère sur les écritures de l'arithmétique.

Intuitivement — et vaguement —, cela peut signifier que l'écriture formée par une expression et un nombre *est une expression nouvelle, intérieure au système. Si l'on veut : qu'en « appliquant » une expression à un nombre, on obtient une écriture du système, qui ainsi se trouve « parler » des nombres.)*

Nous allons considérer qu'il existe une fonction φ, dite fonction de représentation, qui associe au couple formé par une expression et un nombre entier, une autre expression. Soit :

$$\varphi(e, n) = e'$$

(avec $e \in E$, $n \in N$, $e' \in E$).
! ! φ est donc une application de E $\times$ N dans E. On a :

$$(E \times N) \underset{\varphi}{\rightarrow} E \underset{g}{\rightarrow} N$$

(Le cas le plus intéressant est celui où l'expression e est un prédicat : intuitivement, $\varphi(p, n)$ peut « exprimer » l'application au nombre n de la « propriété » p. Et on doit alors pouvoir se demander, sans ambiguïté, si l'expression $\varphi(p, n)$ est vraie ou non ; si le nombre n a, ou non, cette propriété. Il faut donc pouvoir considérer l'expression $\varphi(p,n)$ comme complète, *produisant un sens justifiable univoquement d'une évaluation.)*

Nous poserons que toute expression $\varphi(p, n)$ est un *énoncé fermé* (appartient à S. Voir I,1) : $\varphi(p, n) \in$ S.

4) *Mécanisme-3.*

Qu'un mécanisme-3 (de dérivation, de démonstration) opère sur les énoncés fermés veut dire :

— Qu'il existe dans S un ensemble d'expressions dites *démontrables.* Soit D cet ensemble (D $\subset$ S).

(S—D) représente, alors, l'ensemble des énoncés non-démontrables.

— Qu'il existe aussi dans S un ensemble d'expressions *réfutables,* soit R. (R est donc l'ensemble des expressions dont la négation est démontrable.) (R $\subsetneq$ S)

(Nous faisons bien apparaître les deux *conditions qui caractérisent un mécanisme-3 ; la dichotomie (dérivable et non-dérivable,* D *et* S – D*) : la correspondance par négation, qui regroupe les expressions dont ont peut dériver la négation* (R).

Le problème de Gödel est alors de savoir si tout énoncé (fermé) non-démontrable *est* réfutable. *Peut-on toujours poser* : (S – D) = R ?

Notre propos est d'établir des conditions de structure qui rendent impossible *cette égalité.)*

5) *Consistance.*

Nous souhaitons qu'il ne puisse pas y avoir d'empiétement du démontrable sur le réfutable, ce qui équivaudrait à une contradiction. Aucune expression ne doit donc appartenir simultanément à D et à R : le système sera dit *consistant* si l'intersection de ces deux ensembles d'expressions est vide : $D \cap S = \varnothing$.

!! Au niveau de généralité où nous nous tenons, il est évidemment possible de se passer de toute interprétation, et de dire qu'on se donne :

— $E, P \subset E, S \subset E, R \subset S, D \subset S$.

— $R \cap D = \varnothing$.

— $N, E \xrightarrow{g} N$ (g biunivoque sur).

— $(E \times N) \xrightarrow[\varphi]{} E$, avec $(\forall p)\ (\forall n)[(p \in P, n \in N) \rightarrow \varphi(p, n) \in S]$.

II

1) *Diagonalisation et classes $W^\star$.*

Parmi les expressions du type $\varphi(e, n)$, il en est de très intéressantes : celles où le nombre n est précisément le nombre $g(e)$ qui « numérote » (voir I,2) l'expression e.

L'expression $\varphi(e, g(e))$ est appelée la *diagonalisation de e.*

(Nerf de la preuve : on « applique » l'expression au nombre qui la « représente ».)

Considérons maintenant un ensemble d'expressions de E, absolument quelconque, soit W (on a simplement $W \subset E$).

Supposons que figurent, dans W, des expressions diagonales, du type $\varphi(e, g(e))$. Nous allons associer, à l'ensemble *d'expressions* W, la classe de *nombres* $W^\star$; cette classe $W^\star$ comprendra tous les nombres qui numérotent des expressions dont la diagonalisation est dans W.

Appartenir à $W^\star$, pour un nombre n, signifie qu'il existe une expression e telle que :

a) $g(e) = n$ (n « représente » e);

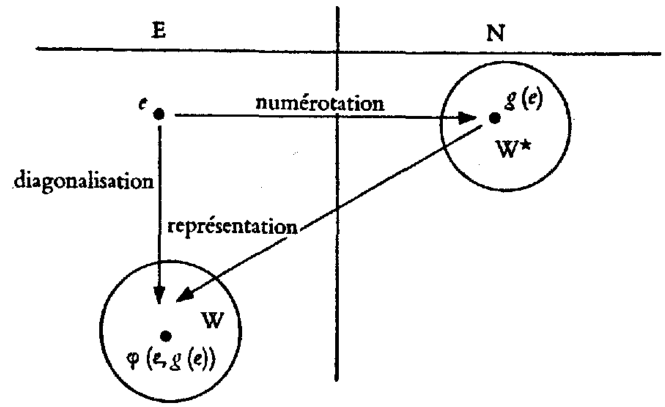
b) $\varphi(e, g(e)) \in W$ (la diagonalisation de e est dans W).

Ou encore, en employant le classique symbole $\leftrightarrow$ pour l'équivalence :

$$n \in W^\star \leftrightarrow [n = g(e)] \text{ et } [\varphi(e, g(e)) \in W]$$

Naturellement, si W ne contient aucune expression diagonale, $W^\star$ est la classe vide.

On a donc la situation suivante :



!! Soit φ_d la fonction-diagonale définie sur E par : $\varphi_d(e) = \varphi(e, g(e))$.

On a : $W^\star = g \circ \varphi_d^{-1}(W)$.

2) *Énoncé de Gödel pour un ensemble d'expressions.*

L'idée directrice est maintenant d'associer à un ensemble W d'expressions un *énoncé* (fermé) tel que sa « vérité » dépende de sa position par rapport à W. Autrement dit un énoncé qui est démontrable *si et seulement si il appartient à W.*

Un tel énoncé (appartenant à S, voir I,1), soit G, satisfait donc (rappelons que D est l'ensemble des énoncés démontrables) :

$$G \in D \leftrightarrow G \in W$$

On l'appelle un *énoncé de Gödel pour W.*

(*Un énoncé de Gödel pour l'ensemble d'expressions* W, *s'il existe, est donc un énoncé dont la* démontrabilité *est « exprimable » en termes d'appartenance à* W. *Nous avons ici une sorte d'équivalent de ce que Gödel démontre — laborieusement — dans son système; qu'on y peut construire le prédicat : « démontrable dans le système ».*)

3) *Représentation d'une classe de nombres dans le système.*

On dira qu'un *prédicat p* $\in$ P (voir I,1) représente une classe de nombres entiers A $\subset$ N, si l'on a :

$$\varphi(p, n) \in D \leftrightarrow n \in A$$

(*« L'application » de p au nombre n donne un énoncé démontrable si et seulement si ce nombre appartient à la classe A. Il s'agit là d'une élaboration très formelle de l'idée intuitive suivante; la propriété p n'appartient qu'aux nombres de la classe A. Ou: la classe A est l'extension du concept p.*

4) *Lemme de diagonalisation.*

Nous allons démontrer la proposition suivante :

Si la classe de nombres entiers $W^\star$ est représentable dans le système par un prédicat, alors il existe un énoncé de Gödel pour l'ensemble d'expressions W.

Soit p le prédicat qui représente $W^\star$. Par définition (paragraphe précédent) :

$$\varphi(p, n) \in D \leftrightarrow n \in W^\star$$

En particulier, pour $n = g(p)$

$$(i) \qquad \varphi(p, g(p)) \in D \leftrightarrow g(p) \in W^\star$$

(*La* diagonalisation *du prédicat p est* démontrable *si et seulement si la* numérotation *de p appartient à* $W^\star$.)

Mais (voir II, 1), la définition même de la classe $W^\star$ est :

$$(ii) \qquad g(p) \in W^\star \leftrightarrow \varphi(p, g(p)) \in W.$$

En *confrontant les équivalences* (i) *et* (ii), nous obtenons (par substitution d'un terme équivalent à celui de droite dans (i); ou, si l'on veut, en appliquant la transitivité de l'équivalence) :

$$\varphi(p, g(p)) \in D \leftrightarrow \varphi(p, g(p)) \in W.$$

Nous reconnaissons (II, 2) la définition d'un énoncé de Gödel pour W : $\varphi(p, g(p))$ est cet *énoncé* (c'est bien en effet un énoncé fermé, puisque — (voir I, 3) — nous avons posé que pour un *prédicat* l'expression $\varphi(p, n)$ appartient toujours à S).

(*Qu'avons-nous démontré ? Que si une classe* $W^\star$ (*de nombres*) *est représentée par un prédicat dans le système, la* diagonalisation de ce prédicat *est un énoncé de Gödel pour l'ensemble d'expressions* W.

Faisons un pas de plus dans la description (*idéologique*) *de ce résultat.*

Soit un ensemble quelconque d'expressions, W. *Supposons que* W *contienne des expressions diagonales* (*expressions « appliquées » au nombre qui les représente dans la numérotation des expressions*). *On considère alors l'ensemble des nombres qui numérotent ces expressions diagonales. cet ensemble est* $W^\star$ (*voir schéma dans II,* 1).

Dire que $W^\star$ *est représenté dans le système, c'est dire qu'il existe un prédicat dont le « sens » est: « être un nombre qui représente une expression diagonale contenue dans* W *».*

Diagonalisons ce prédicat (*« appliquons » le à son propre représentant numérique*). *Nous obtenons un* énoncé *dont le sens serait quelque chose comme;*

*« Le nombre qui représente le prédicat « être-un-nombre-qui-représente-une-expression-diagonale-contenue-dans-*W *» est lui-même un nombre qui représente une expression diagonale contenue dans* W *».*

C'est cet énoncé qui n'est démontrable que s'il appartient à W*; c'est donc un énoncé de Gödel pour* W.

On y reconnaîtra la structure sous-jacente aux procédés diagonaux qui, depuis Cantor, ont donné son principal instrument à la mathématique « fondamentale »: construire un énoncé qui affirme de lui-même son appartenance à un groupe d'expressions que par ailleurs cet énoncé représente ou désigne.)

III

L'idée directrice, qui va compléter l'argument, est fort simple : Nous allons appliquer le lemme de diagonalisation à la classe R des énoncés *réfutables*. Et nous obtiendrons ainsi très facilement *le théorème de Gödel: si R* est représentable* (*au sens de II,* 3), *il existe un énoncé qui n'est ni démontrable, ni réfutable.* (*Qui n'appartient ni à D, ni à R.*)

Si $R^\star$ est représentable, il existe un énoncé de Gödel pour R (lemme de diagonalisation). Soit G cet énoncé. Par définition (II, 2) :

$$G \in D \leftrightarrow G \in R$$

(G est démontrable si et seulement si il est réfutable...)

Mais $D \cap R = \varnothing$

(D et R n'ont aucun élément commun : hypothèse de consistance, I, 5.)

G n'appartient donc *ni* à D *ni* à R : c'est un *énoncé indécidable.*

(*Que signifie l'hypothèse initiale:* $R^\star$ *est représentable ? Elle signifie qu'il existe dans le système un prédicat dont le « sens » serait : « être un nombre qui représente une expression diagonale réfutable ».*

Quant à l'énoncé de Gödel pour R — *l'énoncé indécidable — nous savons, par la démonstration du lemme, qu'il n'est autre que la diagonalisation du prédicat qui représente* $R^\star$. *C'est donc un énoncé dont le « sens » serait quelque chose comme:*

« Le nombre qui représente le prédicat « être-une-expression-diagonale-réfutable » représente lui-même une expression diagonale réfutable. »

On reconnaîtra la parenté avec l'argument « intuitif » du Menteur.)

Cette démonstration met en évidence le noyau de la découverte de Gödel : si l'on peut construire dans un système un prédicat de la réfutabilité, son « application » aux expressions diagonales donne lieu à l'indécidabilité d'une certaine classe d'énoncés.

Cette démonstration met également en lumière le cheminement en zig-zag qui organise la preuve « entre » le système formel et la théorie « intuitive » des entiers : c'est la représentation (numérotation) des expressions qui permet la diagonalisation. Inversement, c'est la construction dans N des classes $W^\star$ qui, « reprise » prédicativement dans le système, permet la démonstration cruciale du lemme. Dans notre langage, nous dirons que la preuve opère ici sur des connexités de strates, qui autorisent des parcours et des correspondances.

La complication scrupuleuse de la démonstration de Gödel, par rapport à celle de Smullyan, tient à ce que le premier doit établir pour un système *déterminé* (en gros, celui des *Principia Mathematica*) la représentabilité de $R^\star$.

Mais le point de vue très général adopté par Smullyan dégage clairement le caractère positif et structural de la découverte : comme très souvent en mathématiques, elle développe un réseau de *contraintes* conditionnelles : si l'on prescrit à notre système la consistance ($D \cap R = \varnothing$) *et* une capacité représentative

« forte » (la classe de nombres R^* est « désignée » par une expression de E), on peut construire un « reste » dans l'ensemble des énoncés : montrer que les ensembles disjoints D et R ne forment pas un *recouvrement* de S.

Prenons garde que les concepts de représentabilité, de consistance, de disjonction, de numérotation etc., sont ici mathématiquement assignés, et ne conservent rien de leurs connotations empiriques ou philosophiques. Le concept de « représentant » en particulier, nous ne l'avons utilisé que pour faire image, en lieu et place de ce qu'il recouvre : des *fonctions* (g et φ), définies de la façon la plus classique.

Le résultat de Gödel n'est donc particulier, dramatique, qu'au regard d'une saturation sémantique qui *rabat* sur le discours de la science une *attente idéologique*.

Qui pose à la logique des questions qui ne sont pas des problèmes, s'expose à ressentir comme *résistance* ce qui n'est que le déploiement des contraintes régionales où *advient* l'objet factice de cette science.

Ainsi retrouvons-nous la dialectique articulée de la science et de l'idéologie. Pour le problème qui nous intéresse, les étapes en sont les suivantes :

I) Existence d'une mathématique historique (soit : l'arithmétique « intuitive »), principiellement ouverte (signifiant indéfiniment stratifié).

II *a*) Re-présentation idéologique de cette existence comme norme trans-mathématique de la rationalité intégralement maîtrisable (déstratification idéologique du signifiant mathématique).

II *b*) Question posée aux mathématiques de leur conformité à la norme idéologique : *intention* axiomatique et formaliste, visant à exhiber une *transparence fondée*. (Motivations idéologiques de Frege et Russell.)

III) Coupure : traitement mathématique de la re-présentation idéologique des mathématiques : *Construction* effective de systèmes formels « représentant » l'arithmétique historique (*Principia Mathematica*).

IV *a*) Re-présentation idéologique de la coupure : les systèmes formels, conçus comme normes trans-mathématiques de la fermeture rationnelle. *Idée* d'un système nomologique (Husserl).

IV *b*) Question posée aux mathématiques de leur conformité absolue à la norme idéologique de fermeture. *Intention* méta-mathématique, relative à la démonstration *intérieure* de la consistance d'un système (Hilbert).

V) Coupure : traitement mathématique de la re-présentation idéologique. *Construction* effective d'une méta-mathématique mathématique (arithmétisation de la syntaxe).

Théorème de Gödel : la stratification structurale du signifiant mathématique ne répond pas à la « question » de la fermeture.

VI) Re-présentation idéologique de la coupure : au regard de l'attente normative, le théorème de Gödel est vécu comme *limitation*.

Exégèse idéologique de cette « limitation », comme :

— parole ouverte et recel de l'être (Ladrière);

— finitude;

— refente, suture;

— ...

VII) Coupure : théorie générale de l'effet-limitation, conçu positivement comme instance structurale de certains objets mathématiques (vérité épistémologique de Smullyan).

L'enseignement épistémologique de cette aventure croisée nous rappelle que la mathématique *opère sur sa propre existence en tant qu'indiquée dans l'idéologie*, mais que cette opération, conforme aux contraintes spécifiques d'une science, prend la forme d'une *coupure*; en sorte que les questions (idéologiques) dont, à titre de *matériau*, la mathématique opère la reprise œuvrante, ne trouvent en elle *aucune réponse*.

A venir figurer dans l'espace problématique des mathématiques, une image idéologique de cette science ne peut qu'être désormais *méconnue* par celui qui la prodiguait. Car de matériau devenue produit, elle se conforme à des règles d'existence que *rien*, dans le matériau, ne pouvait indiquer.

Où l'on voit en toute rigueur que la science est science de l'idéologie, et même science de l'idéologie de la science de l'idéologie, aussi loin qu'on voudra. Mais l'idéologie ne s'y retrouve jamais.

Telle est la loi de chaîne alternée où insiste ce qu'on nomme « progrès de la science » : ce n'est pas parce qu'elle est « ouverte » que la science a motif à se déployer (bien que l'ouverture règle la *possibilité* de ce déploiement) : c'est parce que, de cette ouverture, l'idéologie est inapte à se satisfaire. Forgeant l'impraticable image du discours fermé, enjoignant à la science de s'y plier, elle se voit renvoyer son ordre méconnaissable sous les espèces du concept nouveau, du remaniement par quoi la science, traitant comme matériau l'interpellation idéologique, déplace incessamment la brèche qu'elle y ouvre.

Mesurons ici — cette fois au plus près de Lacan — le ridicule des motivations du progrès par « l'intention » de découverte.

Du théorème de Gödel, et de la connotation limitative où, après les irrationnels, les négatifs et les imaginaires, il s'est annoncé, retenons que la science avance *précisément* par ceux qui, lui posant la question de son arrêt, ordonnent désespérément le lieu où reconnaître que cette question, pour *reprise* qu'elle soit, n'est pas même entendue.

Janvier 1967.

Jacques Bouveresse

Philosophie des mathématiques et thérapeutique d'une maladie philosophique :

Wittgenstein et la critique de l'apparence « ontologique » dans les mathématiques

> « Puisque tout est étalé sous nos yeux, il n'y a rien à expliquer. Car ce qui est caché, par exemple, ne nous intéresse pas. » (*Investigations philosophiques*, 126.)

Dans le *Tractatus*, Wittgenstein professait une sorte de logicisme [1] dissident dont l'originalité résidait essentiellement dans son opposition déjà très marquée au réalisme logique plus ou moins accusé et plus ou moins avoué des théories orthodoxes comme celles de Frege et Russell. La critique des pseudo-objets mathématico-logiques (le « vrai », le « faux », l' « objet », le « nombre », la « proposition », etc.) aboutissait en effet en fait au dépeuplement intégral de cet univers « paradisiaque » de la logique sur lequel Whitehead et Russell avaient cru pouvoir fonder une reconstruction globale de l'édifice mathématique et ramenait, en un certain sens, la question des fondements à un niveau purement opérationnel [2].

Entre 1929, année où il reprit ses recherches à Cambridge, et 1932 environ, Wittgenstein mit par écrit un certain nombre de réflexions sur la philosophie des mathématiques et de la logique qui se rattachent en gros à la

1. Bien que le *Tractatus* n'apporte à proprement parler aucune caution au programme réductionniste des logicistes de stricte observance et que Wittgenstein y propose une théorie du nombre qui s'apparente par certains côtés à celle des intuitionnistes, on pourra néanmoins considérer sa position du moment comme un logicisme marginal si l'on admet avec Carnap que le requisit fondamental de la théorie logiciste (dans son opposition au formalisme) doit finalement être formulé de la façon suivante : « La tâche qui consiste à fonder logiquement les mathématiques n'est pas remplie complètement par une métamathématique (c'est-à-dire par une syntaxe des mathématiques) seule, mais uniquement par une syntaxe du langage total, qui contient à la fois des propositions logico-mathématiques et des propositions synthétiques » (*The logical Syntax of Language*, Routledge and Kegan Paul, Londres, 6e édition, 1964, p. 327). Par « logicisme » du *Tractatus* on entendra simplement le fait que, pour son auteur, les mathématiques et la logique décrivent solidairement *la* logique du monde.

2. « Le nombre est l'exposant d'une opération » (*Tractatus logico-philosophicus*, 6. 021).

conception du *Tractatus* et qui n'ont pas été publiées [3]. Celles qui ont été rassemblées pour la première fois en 1956, dans l'ordre chronologique de leur rédaction, par G. H. von Wright, T. Rhees et G. E. M. Anscombe sous le titre *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* s'échelonnent sur une assez longue période (1937-1944) et sont à rapprocher des *Investigations philosophiques*, auxquelles elles devaient, pour une part tout au moins, être incorporées [4]. Wittgenstein ne devait plus revenir par la suite à ce genre d'étude. Les *Remarques* représentent donc sa dernière philosophie des mathématiques et le choix fait par les responsables de l'édition parmi de nombreuses notes manuscrites a pour but de donner une idée aussi complète et aussi exacte que possible du chemin considérable parcouru sur la question depuis l'époque du *Tratactus* et de la position (il vaudrait mieux dire *des* positions) extrêmement originale et, pour tout dire, assez précaire du second Wittgenstein sur le problème précis du fondement des mathématiques et un certain nombre de matières annexes.

L'ensemble des *Remarques* qui, il faut le noter, ne constituent ni dans les intentions primitives de l'auteur ni dans les faits un véritable livre, est disparate et très inégal, à peu près toujours déconcertant et stimulant pour le philosophe et décevant — selon toute probabilité — pour le mathématicien et le logicien. M. Dummett [5] juge l'ouvrage dans ces termes : « Bien des idées sont exprimées d'une manière que l'auteur reconnaissait comme inexacte ou obscure; certains passages sont en contradiction avec d'autres; certains sont dépourvus de tout caractère concluant; certains élèvent des objections contre des idées que Wittgenstein soutenait ou avait soutenues et qui ne sont pas elles-mêmes clairement énoncées dans ce volume; d'autres passages, en outre, en particulier ceux qui portent sur la consistance et sur le théorème de Gödel, sont de piètre qualité ou contiennent des erreurs déterminées. Cela étant, le livre doit être traité comme ce qu'il est — un choix de notes d'un grand philosophe. Comme le disait Frege de ses écrits non publiés, elles ne sont pas toutes de l'or, mais il y a de l'or en elles. Une des tâches du lecteur est par conséquent d'extraire l'or [6]. »

Cowan [7] fait remarquer assez justement que la philosophie des mathématiques et de la logique de Wittgenstein est en un sens purement étrangère

3. Cf. « Vorwort der Herausgeber », in *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, von Ludwig Wittgenstein. Avec une traduction anglaise (*Remarks on the Foundations of Mathematics*) par G.E.M. Anscombe, Oxford, 1956, 2e édition 1964.

4. Le premier des cinq fragments qui composent les *Remarques* faisait même partie d'une version primitive du manuscrit des *Investigations*. Par ailleurs un certain nombre de remarques sont passées à peu près textuellement dans ce dernier livre et ont parfois été laissées de côté pour cette raison.

5. Cf. « Wittgenstein's Philosophy of Mathematics », in *The Philosophical Review*, Vol. LXVIII (1959). Repris dans *Wittgenstein, The Philosophical Investigations*, A Collection of Critical Essays, edited by George Pitcher, New York, 1966, et également dans *Philosophy of Mathematics*, selected readings edited by Benacerraf and Putnam, Prentice-Hall, Inc.. Englewood Cliffs, N.J. 1964.

6. Pitcher, p. 420.

7. Cf. « Wittgenstein's Philosophy of Logic », in *The Philosophical Review*, Vol. LXX (1961), p. 362-375. Cf. p. 374.

aussi bien à la logique qu'aux mathématiques et à la philosophie de ces deux disciplines; car, en fait, Wittgenstein ne se préoccupe ni de nier ce sur quoi les autres s'entendent et dont ils partent, ni d'adopter pour son propre compte les mêmes points de départ, mais uniquement de regarder ailleurs, plus loin ou plus en profondeur, pour montrer que de tels points de départ n'ont aucun fondement et aucune raison d'être. Ce n'est effectivement pas par les éléments de réponse qu'il pourrait éventuellement apporter à un problème, en l'occurrence celui du fondement des mathématiques, que Wittgenstein attire l'attention du philosophe, mais par la ténacité avec laquelle il conteste que le problème ait à se poser. En fait, bien que certains aspects de ses analyses l'apparentent tour à tour plus ou moins à chacune des trois grandes écoles : logicisme, formalisme, intuitionnisme, Wittgenstein rejette en bloc toutes les entreprises de « fondation » des mathématiques parce qu'il nie purement et simplement que la mathématique ait à être « fondée ». Si les *Remarques* constituaient un véritable livre, le thème n'en pourrait être qu'une dénonciation, par les procédés habituels de la philosophie analytico-linguistique, de la non-pertinence d'une problématique historique démesurément grossie et chargée d'un pathos abusif : la dramatique « question des fondements ».

Pour comprendre la position tout à fait particulière de Wittgenstein, il faut s'interroger d'abord sur les conditions d'apparition de la problématique qu'il récuse et d'instauration du débat auquel il semble prendre part tout en en contestant les termes. La question des fondements naît, à la fin du XIX[e] siècle, d'une « crise » de la pensée mathématique. La crise au sens étroit du mot est consécutive à la rencontre de phénomènes « pathologiques » : paradoxes, antinomies, etc., dans une science réputée sûre et elle se résout à un premier niveau par la simple reconstruction axiomatique de la théorie des ensembles. La crise au sens large est une crise au sens husserlien du mot : elle concerne le « sens » même de l'activité mathématique et oblige le mathématicien à se poser un certain nombre de questions préjudicielles qui portent sur la nature de la « vérité » mathématique, le sens des propositions mathématiques, le type d'évidence auquel elles font appel, etc. Ces questions se posent évidemment en permanence à la philosophie, indépendamment de la « conjoncture » mathématique. En temps normal, la pratique scientifique poursuit et atteint ses objectifs dans une sereine « irresponsabilité » : les mathématiques et la logique se développent comme des techniques autonomes et autarciques en faisant confiance à des évidences « naïves » non critiquées. La venue au jour de productions tératologiques comme les nombres irrationnels, les géométries non-euclidiennes ou les ensembles paradoxaux, est à chaque fois l'occasion pour la science mathématico-logique d'une reconquête philosophique de son « authenticité ». Le fait que l'état de crise se matérialise un jour dans des difficultés ou des paradoxes ne fait que rendre sensible aux yeux du praticien lui-même l'urgence d'une interrogation critique et d'une entreprise systématique de « fondation ».

Résoudre la question des fondements pour les trois écoles logiciste, formaliste et intuitionniste, c'était fournir à la fois une reconstruction (plus ou moins complète) des mathématiques et une philosophie pour la soutenir. On ne trouve ni l'une ni l'autre de ces deux préoccupations chez Wittgenstein, qui ne fait pas œuvre de mathématicien et n'entend par « philosophie des mathématiques » rien d'autre qu'une clarification de la grammaire des énoncés mathématiques tels qu'ils sont.

Pour le situer d'emblée et de façon brutale par rapport à ses interlocuteurs, il convient de signaler d'abord, d'un point de vue très général, que

1) Contrairement à ce qu'on pourrait être tenté de croire à propos de l'auteur du *Tractatus*, Wittgenstein ne prend pas ou ne prend plus très au sérieux la pensée mathématique et ses mésaventures [8]. C'est ce qui explique sans doute qu'il considère avec beaucoup de détachement et une certaine légèreté l'espèce de cataclysme qui a ébranlé, quelques dizaines d'années auparavant, l'univers des mathématiciens et l'extraordinaire travail de recherche critique et de reconstruction qui s'en est suivi. L'aptitude à vivre ou à revivre un drame qui parut à certains mettre en péril la raison elle-même et donna lieu, dans les essais de solution, à des controverses passionnées, est évidemment fonction de l'idée philosophique que l'on se fait des mathématiques et de la logique. Pour Wittgenstein, une crise de la raison pure mathématique ne peut être à proprement parler qu'une invention de philosophes, non parce que les mathématiques représentent une sorte d'Absolu intangible et jamais réellement menacé, mais précisément parce qu'elles ne sont pas absolues et n'ont nullement besoin de l'être. Il estime, pour sa part, que la mathématique proprement dite est toujours ce qu'elle doit être et obtient toujours ce qu'elle cherche, en un mot qu'elle est, selon une expression qu'il affectionne particulièrement, « en ordre ».

2) Pour lui les mathématiques et la philosophie n'ont rigoureusement rien à se dire [9] : aucune découverte mathématique ne peut avoir de répercussion véritable sur la philosophie des mathématiques et la philosophie tout court; inversement aucune opinion philosophique ne devrait en principe pouvoir affecter réellement la pratique des mathématiciens [10]. Pour

8. Si l'on en croit Carnap, le refus délibéré d'accorder aux sciences exactes l'importance qu'elles méritent et une tendance constante, chez Wittgenstein, à les dénigrer sont, pour une part importante, à la source des premières dissensions sérieuses avec les membres du Cercle de Vienne. Cf. Carnap, « Intellectual Autobiography », in *The Philosophy of Rudolf Carnap*, edited by P. A. Schilpp, The Library of Living Philosophers, 1963, p. 28. Le scientisme viennois ne pouvait que heurter en Wittgenstein une conviction « pascalienne » de l'inutilité profonde des sciences et de la philosophie. En ce qui concerne la philosophie, les dernières propositions du *Tractatus* donnaient clairement à entendre que la seule philosophie possible (l'analyse critique du langage de la science) est par essence inapte à résoudre aucun des problèmes que l'on est en droit de considérer comme « importants ». Pour Wittgenstein, il est clair en tout cas que, si les sciences ont pu connaître quelque chose comme une « crise », ce n'est pas parce qu'elles se sont séparées de la philosophie de type traditionnel, mais parce qu'elles n'ont pas su le faire.

9. Cf., par exemple, *Investigations*, 124.

10. Cette deuxième thèse est évidemment encore plus difficile à soutenir que la première et il est douteux que les procédés utilisés, dans une perspective intuitionniste, par Wittgenstein (cf. les analyses consacrées au principe du tiers-exclu, à la *reductio ad absurdum*, à la coupure de Dedekind, etc., in *Bemerkungen*, IV) pour la condamnation de certains types de raisonnement mathématique, l'autorisent à la

Dummett, cette position théorique sans fondement véritable dérive essentiellement d'une tendance générale, chez Wittgenstein, à fragmenter le discours scientifique en un certain nombre de domaines insulaires sans communication [11]. On verra à ce propos ce que Wittgenstein pense de la discipline hybride qui s'intitule « logique mathématique ».

3) L'attitude générale de Wittgenstein, en matière de philosophie des mathématiques, est un « opportunisme [12] » radical qui se veut indifférent à toute problématique « théorique » et se résume dans la conviction bien arrêtée que la science mathématique, telle qu'elle est, « fonctionne » à la satisfaction générale et qu'elle est seule juge des instruments à utiliser ou à rejeter, le choix ne pouvant être dicté en dernière analyse que par des considérations pragmatiques, en dehors de toute référence à des instances épistomologiques. Ennemi déclaré de toute spéculation sur les possibilités ou les impossibilités de la technique mathématique, il estime qu'il est inutile, d'une manière générale, d'essayer de prévoir [13] des solutions ou des difficultés lorsqu'on n'est pas effectivement en mesure de les faire apparaître. Conformément à la thèse générale du *Tractatus*, là où il n'y a pas de réponse possible en principe, il n'y a pas non plus réellement de question [14]. Il n'y a en fait ni drames ni surprises en mathématiques et il est toujours temps d'essayer de sortir, si on le juge bon d'une impasse apparente, lorsqu'on s'y trouve concrète-

défendre effectivement. Celui qui, en vertu de restrictions intuitionnistes, croit devoir, par exemple, sacrifier une partie de l'analyse, le fait pour des raisons qu'il faut bien appeler, faute de mieux, « philosophiques ». Bourbaki n'hésite d'ailleurs pas à écrire : « L'école intuitionniste, dont le souvenir n'est sans doute destiné à subsister qu'à titre de curiosité historique... » (*Éléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, 1960, p. 56). Quoi qu'ait pu en penser Wittgenstein, l'arithmétique des nombres cardinaux transfinis, par exemple, s'est, en un sens, bel et bien intégrée à notre univers mathématique et le philosophe, tel qu'il le conçoit, ne peut pas faire autre chose que d'en prendre acte. Quant à l'adoption psychologiste ou pragmatiste de critères, peu sympathiques aux philosophes, comme l'« intérêt », l'« applicabilité », etc., elle implique évidemment encore toute une philosophie des mathématiques, non point neutre et purement descriptive, comme le veut Wittgenstein, mais discriminatoire.

11. Cf. Pitcher, p. 423.

12. Hilbert qualifie d'« opportunistes », sur un point précis, certains adversaires de Kronecker qui cherchent à opérer contre lui le sauvetage du nombre irrationnel, indispensable à l'analyse, et à en établir l'existence « positive ». Cf. *Grundlagen der Geometrie*, Anhang VII, « Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik », Leipzig et Berlin, 3e éd. 1909, p. 264. Pour Wittgenstein l'indépendance de deux systèmes de nombres est suffisamment fondée sur la différence de deux méthodes de calcul.

13. « Il n'y a que ce que nous construisons nous-mêmes que nous puissions prévoir », disait déjà le *Tractatus* (5.556); cf. *Notebooks*, 1914-1916, Oxford, 1961, p. 71.

14. « La proposition de Fermat n'a donc pas de *sens*, tant que je ne peux pas *chercher* la résolution de l'équation par des nombres cardinaux.

« Et « chercher » doit toujours vouloir dire : chercher de façon systématique. Lorsque j'erre dans l'espace infini à la poursuite d'un anneau d'or, il ne s'agit pas d'une recherche.

« On ne peut chercher que dans un système : il y a donc, en tout état de cause, quelque chose que l'on *ne* peut chercher. » (*Philosophische Bemerkungen*, Oxford, 1964, XIII, 150, p. 175). Les *Philosophische Bemerkungen*, parues en 1964, correspondent, dans l'évolution de Wittgenstein, à une période de transition. Elles rassemblent des matériaux accumulés, en vue d'une publication, entre février 1929 et juillet 1930. Cette période fut consacrée, entre autres choses, à des discussions suivies avec Ramsey, dans lesquelles la philosophie des mathématiques tint évidemment une place essentielle.

ment acculé [15]. Pour cela, on peut faire confiance, le moment venu, aux mathématiques et à la logique elles-mêmes, qui n'ont nul besoin de secours extérieur : selon une autre formule chère à Wittgenstein, les mathématiques et la logique « veillent sur elles-mêmes » (*sorgen für sich selbst* [16]).

Il est évidemment à peu près impossible et il serait, en outre, malhonnête d'essayer de recomposer, à partir de données éparses et fragmentaires, une doctrine complète et cohérente que l'on pourrait attribuer à Wittgenstein, puisque les *Remarques* ont, en plus d'une obscurité comparable à celle des ouvrages rédigés [17], l'inconvénient majeur de n'être qu'un recueil de notes. On se propose seulement ici d'exposer brièvement, sans trop chercher à en apprécier la pertinence et la portée réelle, les vues de Wittgenstein sur un certain nombre de points « névralgiques » :

1) Le problème cardinal des rapports entre la philosophie comme activité, non plus de « fondation », mais de « clarification » [18], et les mathématiques.

2) Le problème du sens de la « nécessité » logico-mathématique en général et de la contrainte démonstrative en particulier.

3) Le statut particulier de la pseudo-proposition mathématique et les conséquences qui s'ensuivent pour la problématique des fondements, aussi bien au sens de Russell qu'au sens de Hilbert, comme pseudo-problématique.

4) L'inexistence de fait du problème de la non-contradiction, tel qu'on le comprend habituellement, problème dont la prégnance est due essentiellement aux implications philosophiques de la méthode axiomatique.

15. Cette attitude s'exprime de façon particulièrement claire à propos des démonstrations de non-contradiction dans les discussions que Wittgenstein eut avec Waismann et Schlick et dont des extraits ont été publiés à la fin des *Philosophische Bemerkungen* sous le titre « Widerspruchsfreiheit » (p. 318-346). Bien que sa philosophie des mathématiques ait subi par la suite d'importants remaniements, il ne semble pas que sa sympathie pour les métamathématiciens se soit beaucoup accrue.

16. Chacune pour soi en principe!

17. Comme le rappelle plaisamment Quinton : « La bible du mouvement de l'analyse logique fut le *Tractatus*. A l'instar d'autres textes sacrés, il combinait la ferveur prophétique avec l'obscurité sibylline d'une manière telle qu'il appelait et reçut un grand nombre d'interprétations opposées. » (Excerpt from *Contemporary British Philosophy*, Pitcher, p.1-21, cf. p. 3). On peut dire la même chose des *Remarques*, avec, sans doute, la « ferveur prophétique » en moins.

18. Bien qu'une commune ambition de « clarification du sens » puisse suggérer des rapprochements entre la philosophie linguistique et la phénoménologie, il est clair que les deux entreprises sont totalement étrangères l'une à l'autre. L'analyse linguistique, telle qu'elle est conçue par le second Wittgenstein et sa postérité oxfordienne n'est au fond qu'une sorte de positivisme « grammatical » pluraliste. Alors que F. Kombartel (« Zur Diskussion philosophische Perspektiven der Diskussion um die Grundlagen der Mathematik zu Verlauf und Konsequenzen eines Kapitels der Philosophiegeschichte », *Archiv für Geschichte der Philosophie*, 1963, XLV, p. 157-193) est prêt à considérer les *Remarques* comme une sorte de phénoménologie des mathématiques, P. Bernays observe que l'attitude de Wittgenstein est fondée sur le rejet systématique de toute espèce de phénoménologie. Cf. *Betrachtungen zu Ludwig Wittgensteins* « Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik », *Ratio*, 1959, I; repris dans Benacerraf et Putnam (« Comments on Ludwig Wittgenstein's « Remarks on the Foundations of Mathematics »), p. 510-528. Voir surtout p. 528.

1. Les mathématiques et la réalité : Le « conceptualisme » ultra-constructiviste de Wittgenstein

L'idée centrale est que la mathématique, comme jeu de langage (ou plus exactement comme pluralité de jeux de langage ayant un air de « famille ») est dépourvue en fait de tout fondement extra-linguistique et extra-opérationnel :

« En quoi la mathématique a-t-elle besoin d'une fondation ? Elle en a aussi peu besoin, à mon avis, que les propositions qui traitent d'objets physiques — ou celles qui traitent d'impressions sensibles, ont besoin d'une *analyse*. Il est vrai cependant que les propositions mathématiques, tout comme ces autres propositions, ont besoin d'une clarification de leur grammaire.

« Les problèmes *mathématiques* des soi-disant fondements sont aussi peu pour nous au fondement des mathématiques que le rocher peint supporte le château peint [19]. »

Pour Wittgenstein, la philosophie des mathématiques n'est pas une activité de contrôle, de justification ou de mise en forme. Elle n'a pas à promouvoir une reconstruction des mathématiques existantes en fonction de certaines idées théoriques, mais uniquement à décrire un certain état de choses techniques :

« Il faut que le philosophe se démène de telle sorte qu'il passe à côté des problèmes mathématiques et ne se cogne pas à l'un d'eux, — qui devrait être résolu, avant qu'il puisse aller plus loin.

« Le travail qu'il effectue en philosophie est pour ainsi dire une fainéantise en mathématiques.

« Il ne s'agit pas de construire un nouvel édifice ou de jeter un nouveau pont, mais de juger de la géographie, *telle qu'elle est maintenant.*

« Nous voyons bien des morceaux des concepts, mais nous ne voyons pas clairement les déclivités qui font passer l'un d'entre eux dans d'autres.

« C'est pourquoi il ne sert à rien, en philosophie des mathématiques, de refondre les démonstrations dans de nouvelles formes. Bien qu'il y ait là une forte tentation.

« Il y a 500 ans également, il pouvait y avoir une philosophie des mathématiques, de ce qui était à l'époque la mathématique [20]. »

Il ne faudrait évidemment pas croire que Wittgenstein s'en prend spécialement à la philosophie de style traditionnel. L'ennemi visé est avant tout la logique mathématique, coupable, selon lui, d'avoir totalement perverti l'esprit des philosophes :

« La « logique mathématique » a complètement déformé la pensée de

19. *Bemerkungen*, V. 13.
20. *Ibid.*, IV, 52.

mathématiciens et de philosophes en promouvant une interprétation superficielle des formes de notre langage courant au rang d'analyse des structures des faits. Elle n'a fait, il est vrai, en cela que continuer à bâtir sur la logique aristotélicienne [21]. »

Et ailleurs :

« La malédiction de l'invasion des mathématiques par la logique mathématique consiste dans le fait qu'à présent chaque proposition peut être représentée dans une écriture mathématique, ce qui fait que nous nous sentons obligés de la comprendre. Bien qu'en fait ce mode d'écriture ne soit que la traduction de la prose ordinaire vague [22]. »

La condamnation portée à l'encontre de la logique symbolique vise essentiellement sa prétention à constituer une langue artificielle idéale [23], alors que, pour Wittgenstein, les langues réelles ne sont pas perfectibles et n'ont pas besoin de l'être. A propos de ce qu'il appelle « « la funeste invasion » des mathématiques par la logique [24] », Wittgenstein précise que « ce qu'il y a de pernicieux dans la technique logique, c'est qu'elle nous fait oublier la technique matématique spéciale. Alors que la technique logique n'est qu'une technique auxiliaire dans les mathématiques, que, par exemple, elle établit certaines liaisons entre d'autres techniques.

« C'est presque comme si l'on voulait dire que le travail de l'ébéniste consiste à coller. »

Soutenir contre un logiciste russellien que les mathématiques ne sont pas de la logique, c'est dire « quelque chose comme : si l'on enveloppe des tables, des chaises, des armoires, etc., dans des quantités suffisantes de papier, elles finiront à coup sûr par avoir l'allure de sphères [25]. » La possibilité de doubler chaque démonstration mathématique proprement dite par une démonstration russellienne qui, d'une manière ou d'une autre, lui « corresponde », n'empêche pas qu'une correspondance de ce type ne repose pas sur la logique. La reconstruction logiciste des *Principia Mathematica* ne fait donc que superposer un jeu de langage à un autre jeu de langage et, s'il est toujours possible de faire retour à la méthode logique primitive, il n'y a rien qui rende ce retour nécessaire et obligatoire. La démonstration n'étant pas autre chose qu'une suite de transformations opérées sur des symboles, rien dans la logique proprement dite ne permet de décréter l'équivalence des résultats de deux séries de transformations effectuées parallèlement dans le système « primaire » et dans le système « secondaire ». Les techniques mathématiques ont en fait une vie propre qui se suffit parfaitement à elle-

21. *Ibid.*, IV, 48.
22. *Ibid.*, IV, 46 .
23. Bien qu'à l'époque du *Tractatus*, Wittgenstein soit convaincu qu'il existe *une* essence et *une* logique du langage, thèse qu'il combattra vigoureusement par la suite, il y soutient déjà que les propositions de notre langage sont « en ordre » telles qu'elles sont. Cf. 5.5563, et également *Philosophische Bemerkungen*, I, 3, p. 52, *Le Cahier bleu*, trad. française, Gallimard, 1965, p. 65, etc.
24. *Bemerkungen*, IV, 24.
25. *Ibid.*, II, 53.

même. Comme le dit Wittgenstein, la logique de Russell « ne nous apprend pas à *diviser* [26] ».

Cette position techniciste et « obscurantiste » est, chez Wittgenstein, le résultat de la combinaison d'un certain formalisme [27] avec un degré extrême de constructivisme, un degré auquel précisément la question des fondements perd sa signification. Pour le platonicien les objets mathématiques ont une « existence » et des relations mutuelles indépendamment de notre pensée et les propositions mathématiques sont vraies ou fausses en vertu d'un certain « état de choses » mathématique. Là, où le platonicien parle d'existence ou de vérité, le constructiviste préfère, pour sa part, parler de constructibilité ou de démontrabilité. Il ne cherche pas à proprement parler à indiquer les « conditions de vérité » d'un énoncé, mais plutôt uniquement les circonstances dans lesquelles *nous* [28] sommes justifiés à l'affirmer, c'est-à-dire dans lesquelles nous considérons que nous sommes en possession d'une démonstration [29]. Ce que cela signifie concrètement peut évidemment varier dans des proportions considérables d'une école à l'autre, mais, à chaque fois, la notion de démonstration supplante plus ou moins une notion de la vérité-correspondance dans l'explicitation du sens d'un énoncé mathématique [30].

Wittgenstein, pour sa part, considère, à la manière des intuitionnistes, les mathématiques comme une activité, non comme une doctrine [31], et le mathématicien comme un « inventeur », non comme un « découvreur » [32]. Mais à cela s'ajoute une sorte de conventionalisme pluraliste qui voit dans les mathématiques quelque chose comme « un *mélange* BARIOLÉ de techniques de démonstration [33] », et dans le calcul une technique anthropo-

26. *Ibid.*, II, 52.

27. Uniquement en ce sens que Wittengenstein conçoit généralement la mathématique comme un eu de symboles sans signification extrinsèque (ce qu'il pense de la méthode axiomatique est suffisamment clair pour qu'on ne soit pas tenté de faire de lui un formaliste hilbertien). « En un certain sens on ne peut en appeler dans les mathématiques à la signification (*Bedeutung*) des signes, pour la raison que c'est seulement (*erst*) des mathématiques qu'ils reçoivent la signification » (IV, 16). Mais, d'un autre côté, « il est essentiel à la mathématique que ses signes soient également utilisés dans le *civil*. C'est l'utilisation en dehors des mathématiques, par conséquent la *signification* (*Bedeutung*) qui fait du jeu de signes une mathématique » (IV, 2).

28. D'où une mathématique parfois qualifiée d'« anthropologique ».

29. Cf. A. Heyting, *Les Fondements des Mathématiques. Intuitionnisme. Théorie de la Démonstration*, Paris, Gauthier-Villars, 1955, p. 16-23.

30. En 1931, Carnap a essayé de fournir une version constructiviste du logicisme, opposée en particulier à la conception « théologique » de Ramsey. Cf. « Die logizistische Grundlegung der Mathematik », Erkenntnis, 1931 (repris dans Benacerraf et Putnam, « The logicist Foundations of Mathematics », p. 31-41). Sa position s'est considérablement libéralisée par la suite. Cf. « Empiricism, semantics and ontology », *Revue internationale de Philosophie*, Vol. IV, (1950), et H. Mehlberg, The present situation in the Philosophy of Mathematics, in *Logic and Language*, Studies dedicated to Professor Rudolf Carnap on the occasion of his seventieth birthday, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1962, p. 69-103.

31. Cf. *Bemerkungen*, III, 15-16.

32. « Der Mathematiker ist ein Erfinder, kein Entdecker. » (*Ibid.*, I, 167).

33. *Ibid.*, II, 46; cf. II, 48 : «Ich will die Buntheit der Mathematik erklären. » et V, 26 : « Mathematik ist also eine Familie... »

nome fondée sur le consensus [34]. Pour Wittgenstein il n'est guère plus question de vérité et de fausseté dans les mathématiques que dans le jeu d'échecs : on a affaire dans les deux cas uniquement à des configurations de symboles, dont les transformations sont réglées par un système de conventions plus ou moins arbitraires. On peut se proposer de décrire exactement le fonctionnement d'un jeu et, à la rigueur, d'en discuter l'intérêt par rapport à d'autres, on ne voit pas très bien où pourrait prendre naissance, s'alimenter et éventuellement se résoudre un prétendu « problème des fondements ».

Un exemple typique d'attitude « réaliste » est offert, comme on sait, par le premier Russell qui, dans l'article intitulé « *Knowledge by Acquaintance and Knowledge by Description* » [35], soutient que nous avons des universaux ce type d'expérience directe qu'il appelle « *acquaintance* ». Quant aux relations nécessaires entre universaux, elles sont « découvertes », « perçues », et non pas construites, par nous. Russell écrit, par exemple dans *Les problèmes de la philosophie* [36] :

« L'énoncé « deux et deux font quatre » a trait exclusivement à des universaux et, par conséquent, peut être connu de quiconque a la connaissance directe (*is acquainted with*) des universaux concernés et peut percevoir la relation qui existe entre eux et que l'énoncé affirme [37]. »

La possibilité pour nous d'appréhender, dans certaines conditions, directement de telles relations entre universaux étant admise comme un « fait découvert par une réflexion sur notre connaissance », il s'ensuit que les mathématiques ont, indépendamment et au-dessus de celles des sciences de la nature, leur sphère propre de « réalité », dont le mathématicien s'efforce de découvrir les lois. Rapprochant les mathématiques de la tragédie, qui réconcilie l'homme avec le monde du Destin, Russell souligne :

« Mais les mathématiques nous font passer davantage encore de ce qui est humain dans la région de la nécessité absolue, à laquelle non seulement le monde actuel, mais encore tout monde possible doit se conformer ; et là précisément elles construisent une demeure, ou plutôt trouvent une demeure éternellement debout, dans laquelle nos idéaux sont pleinement satisfaits et nos meilleures espérances non déçues. C'est seulement lorsque nous comprenons totalement l'entière indépendance, par rapport à nous,

34. Cf. *Ibid.*, II, 65-76.

35. « Proceedings of the Aristotelian Society », 1910-1911; repris dans *Mysticism and Logic*, George Allen & Unwin, 1963, p. 152-167. Cf. également « On the Nature of Acquaintance », 1914, in *Logic and Knowledge*. George Allen & Unwin, 2ᵉ édition, 1964, p. 127-174.

36. *The Problems of Philosophy*, Oxford, 1912; trad. française, Paris, Alcan, 1923, et Payot, 1965. En ce qui concerne la distinction entre « connaissance directe » et « connaissance par description », cf. en particulier chap. 5. Comme le fait remarquer l'éditeur de *Logic and Knowledge*, ce n'est pas à proprement parler une nouveauté philosophique, puisqu'on la trouve déjà esquissée, par exemple, dans le *De Magistro* de saint Augustin.

37. p. 105 du texte anglais.

dont jouit ce monde que la raison découvre, que nous pouvons réaliser de façon adéquate l'importance profonde de cette beauté [38]. »

L'attitude du Russell de cette époque est un des meilleurs exemples de ce contre quoi Wittgenstein ne cesse de s'insurger : la croyance à un monde platonicien des êtres mathématiques et au règne grandiose d'un « fatum » mathématique universel. L' « entière indépendance » de l' « univers mathématique » par rapport à toute donnée anthropologique est en fait une des plus constantes et des plus dangereuses illusions de la philosophie. Le mathématicien ne contemple pas des « essences » préexistantes, mais les crée : « *Der Mathematiker erzeugt* Wesen [39] ». Quant à la découverte de prétendues relations entre de prétendues entités, elle n'est rien de plus que l'établissement de nouvelles connexions grammaticales :

« On pourrait dire : la démonstration modifie la grammaire de notre langue, modifie nos concepts. Elle fabrique de nouvelles connexions (*Zusammenhänge*) et elle crée le concept de ces connexions. (Elle ne constate pas qu'elles sont là, elles ne sont, au contraire, pas là, tant qu'elle ne les fabrique pas [40].) »

Les sciences mathématiques n'ont donc, contrairement à ce que n'ont cessé de croire les philosophes spéculatifs et les mathématiciens philosophes, aucun caractère « théorétique », elles sont purement « poétiques ». Pour Wittgenstein, il est de l'essence d'un énoncé mathématique d'être le résultat d'un processus opératoire, la démonstration ne dévoile pas une vérité, elle construit une proposition [41], c'est-à-dire introduit de nouveaux matériaux dans « les archives » du langage. La question se pose dès lors évidemment de savoir comment une activité humaine dont les points de départ sont conventionnels et les résultats imprévisibles peut présenter le caractère absolument contraignant qui lui a été traditionnellement reconnu et que certains philosophes ont défendu avec tant d'acharnement contre les menées empiristes. Comme le *Du sollst* de la morale, le *Du musst* de la logique et des mathématiques requiert une analyse linguistique qui constitue, pour Wittgenstein, la forme scientifique du vieux problème métaphysique de la nécessité logico-mathématique.

38. *Mysticism and Logic*, p. 55.

39. *Bemerkungen*, I. 32.

40. *Ibid.*, II, 31.

41. « La démonstration (l'image de la démonstration) nous montre le résultat d'un processus (la construction); et nous sommes convaincus qu'en procédant réglementairement de *cette* manière, on est toujours conduit à cette image.

(La démonstration nous présente un fait de synthèse.) » (II, 22). Le *Bild* (comment traduire?) est en même temps *Vorbild* (modèle) et on peut se le représenter comme *kinematographisches Bild*. La mathématique est une sorte de cinématique des configurations de symboles. Ce qui est important dans la séquence démonstrative, ce n'est pas tant le *quid* que le *quomodo* : « La démonstration, pourrait-on dire, ne montre pas seulement *qu*'il en est ainsi, mais : *comment* il en est ainsi. Elle montre *comment* 13 + 14 donnent 27. » (*Ibid.*)

2. L'« inexorabilité » de la logique et des mathématiques : Le « conventionalisme » de Wittgenstein

Le problème philosophique de la nécessité est double : quelle est l'origine de cette nécessité ? Comment l'appréhendons-nous ? La réponse « platonicienne » revient toujours à dire, sous une forme ou sous une autre, que les lois de la logique et des mathématiques régissent une sorte d'univers transcendantal ou transcendant[42] des essences et qu'un accès plus ou moins immédiat nous y est ménagé : elle implique à la fois le réalisme des universaux et l'intuition intellectuelle, ou des substituts appropriés[43]. Pour le conventionalisme, la nécessité ne doit pas être rapportée à une sphère privilégiée de « réalité », mais uniquement aux formes de notre langage : un énoncé est nécessaire en vertu de la décision implicite que nous avons prise d'exclure toute possibilité pour lui d'être falsifié. En reconnaître le caractère nécessaire, c'est simplement prendre conscience de notre intention d'utiliser de telle ou telle manière les mots et les expressions de notre langue.

Dans les *Philosophische Bemerkungen*, Wittgenstein souligne, à propos de la logique des couleurs que l'on peut sans contradiction décrire la finalité des conventions grammaticales en disant qu'elles nous étaient imposées par l'existence de certaines propriétés des couleurs, car, si cette possibilité nous était donnée, elle impliquerait un usage du langage que les conventions excluent précisément et celles-ci seraient inutiles. Inversement, si les conventions étaient réellement nécessaires, c'est-à-dire s'il a fallu exclure certaines combinaisons de mots comme dénuées de sens, il est impossible d'indiquer une propriété des couleurs qui ait pu les rendre nécessaires, car autrement il serait concevable que les couleurs n'aient pas cette propriété et cela ne pourrait être exprimé qu'en violation des conventions[44]. En d'autres termes je ne puis tenter de faire apparaître les conventions comme nécessaires sans les rendre caduques du fait de mon discours lui-même : « ... Ce qui vaut comme non-sens dans la grammaire à justifier ne peut pas non plus valoir comme sens dans la grammaire des propositions justificatrices[45]. » On ne peut rendre raison de la grammaire existante dans une méta-grammaire fondatrice, mais seulement tenter de « clarifier » la grammaire telle qu'elle est[46].

42. L'exemple moderne le plus caractéristique de cette tendance est sans doute la métaphysique logiciste de H. Scholz, Cf. *Mathesis universalis*, Abhandlungen zur Philosophie als strenger Wissenschaft, Benno Schwabe, Basel, Stuttgart, 1961. Mais, au regard de l'interprétation qui nous occupe, il n'y a pas de différence fondamentale entre Scholz et le Husserl de *Logique formelle et logique transcendantale* par exemple.

43. Wittgenstein parle d'une sorte d'« ultra-physique » et d'« ultra-expérience »; cf. *Bemerkungen*, I. 8.

44. Cf. *Philosophische Bemerkungen*, I, 4, p. 53.

45. *Ibid.*, I, 7; dans le cas précis des mathématiques, cela donnera : « *Ich will doch sagen* : *Die Mathematik ist als solche immer Mass und nicht Gemessenes* », (*Bemerkungen*, II, 75).

46. « *Unserer Grammatik fehlt es vor allem an Übersichtlichkeit* » (*Philosophische Bemerkungen*, I, 1, p. 52).

Celui qui dit d'une couleur qu'elle est une tierce plus haute qu'une autre commet une erreur de type [47] qui représente un non-sens dans le langage de la physique, mais qui pourrait n'en être pas une dans un autre jeu de langage comme la poésie baudelairienne par exemple. Je ne puis en aucun cas démontrer qu'une telle expression est dénuée de sens, mais seulement dire : « Celui qui utilise ces mots avec la signification que je leur donne ne peut faire correspondre aucun sens à cette combinaison; et, si elle a un sens pour lui, c'est qu'il met sous les mots quelque chose d'autre que moi [48] ». Il en va de même pour des « impossibilités » logiques beaucoup plus patentes, qui ne sont encore que des interdits grammaticaux doués de sens à l'intérieur d'un certain jeu de langage, généralement celui qui conditionne les relations interpersonnelles courantes : pour nous en tenir à la grammaire des couleurs, à laquelle Wittgenstein emprunte volontiers ses exemples [49], il est clair qu'exclure la possibilité de la présence simultanée de deux couleurs différentes au même endroit, c'est d'abord s'interdire de considérer comme doué de sens le produit logique de deux propositions données.

Toutefois il n'est pas douteux que l'on désigne ici habituellement, sous la dénomination générale de « contradiction », des choses très différentes. Un énoncé comme « Rien ne peut être à la fois noir et non noir » enregistre, dira-t-on, une véritable impossibilité logique, il est en fait indépendant, quant à sa vérité nécessaire, du sens du mot « noir », valable dans tous les mondes possibles, etc. L'énoncé « A est noir et A n'est pas noir » est exclu, semble-t-il, non par la grammaire particulière de la couleur, mais par la forme grammaticale de tout langage possible en général, parce que l'admission d'énoncés de cette forme implique la possibilité de dire n'importe quoi, c'est-à-dire l'impossibilité de dire encore quelque chose. L'énoncé « Rien ne peut être à la fois vert et rouge [50] » est également vrai *a priori*, uniquement en vertu de son sens et indépendamment de la répétition de nos observations; mais ici doit s'ajouter à la compréhension des symboles « logiques » celle des mots « vert » et « rouge ». Cependant, leur sens une fois acquis par l'apprentissage ostensif, il n'est pas nécessaire, apparemment, d'adopter une convention supplémentaire pour exclure l'usage de l'expression « vert et rouge » à propos de la même surface considérée de façon indivise. Il n'est pas évident, au contraire, que l'on puisse rejeter sans une convention spéciale l'expression « vert et bleu », parce que rien dans l'usage des mots « vert »

47. « *Die Grammatik ist eine* « theory of logical types ». » (I, 7, p. 54.)

48. *Ibid.*, I, 4.

49. Voir les réflexions consacrées aux problèmes logico-grammaticaux posés par les rapports des couleurs (incompatibilité, « mixité », complémentarité, etc.), dans les *Philosophische Bemerkungen*, VIII; et également *Bemerkungen*, 1, 102-105, V, 42-44, etc. Dans les cours de 1930-1933, Wittgenstein insiste sur le fait que les « règles de grammaire » 1°) sont toutes « arbitraires » et 2°) « traitent uniquement du symbolisme »; dans la grammaire des couleurs il n'est donc question en principe que du symbolisme des couleurs, et jamais d'entités comme le « vert », le « rouge », etc. Cf. G.E. Moore, « Wittgenstein's Lectures in 1930-33 », *Mind*, Vol. LXIII, 1954, p. 298.

50. Dans tous ces exemples, il faut évidemment entendre : la même portion de l'espace au même moment et sur toute sa surface...

et « bleu » n'interdit d'attribuer le qualificatif « vert et bleu » à quelque chose de marginal qui se situe entre ces deux couleurs [51].

Autrement dit, à supposer que la nécessité dérive entièrement de conventions linguistiques [52], il est des cas, semble-t-il, où elle en résulte directement, d'autres où elle en procède par voie de conséquence [53]. Certains énoncés nécessaires sont de véritables postulats sémantiques par exemple, d'autres en sont des implications plus ou moins lointaines. Une interprétation linguistique classique de la vérité mathématique [54] considère les axiomes comme des conventions initiales concernant l'utilisation des symboles de la théorie; le travail du mathématicien consiste alors à découvrir et à consigner dans des théorèmes les conséquences plus ou moins éloignées des conventions adoptées au départ, le passage des axiomes aux théorèmes s'effectuant conformément à d'autres conventions linguistiques appelées règles de déduction.

Pour Dummett, Wittgenstein professe un conventionalisme beaucoup plus radical et plus conséquent (*a full-blooded conventionalism*) qui consiste à soutenir que la nécessité logique d'un énoncé quelconque est toujours l'expression *directe* d'une convention. La difficulté du conventionalisme moyen réside dans le fait qu'il ne peut à proprement parler rendre compte par lui-même de la *nécessité* pour celui qui adopte à la fois les axiomes et les règles d'inférence d'adhérer à toutes les conséquences. Cette adhésion donnée une fois pour toutes est peut-être une illusion; car, en fait, nous devons encore, à chaque étape de la déduction, nous mettre d'accord sur le fait qu'elle correspond bien à une application correcte des règles. Pour Wittgenstein, selon Dummett, « le fait qu'un énoncé donné est nécessaire consiste toujours dans la décision expresse que nous avons prise de traiter cet énoncé précis comme inattaquable [55] ». De là résulte une conception tout à fait particulière de la « contrainte logique [56] », que l'on peut considérer comme une sorte de « behaviorisme » radical :

51. Pour Wittgenstein, « *grammar should not allow me to say « greenish-red » »* et « « *There is such a colour as a greenish blue » is « grammar » »*. Cf. Moore, article cité, *ibid.* Ce disant, Wittgenstein avait évidemment conscience de « faire rentrer dans la grammaire des choses qui ne sont pas ordinairement supposées lui appartenir ».

52. Parmi les logiciens actuels, Carnap est resté fidèle à l'interprétation linguistique de la vérité logique. La distinction tranchée de la vérité logico-linguistique et de la vérité « factuelle » a rencontré l'opposition de Tarski et de Quine par exemple, qui admettaient une différence de degré, mais non de nature. Pour un point de vue récent sur le problème de la vérité logique et de l'analyticité, cf. Quine « Two dogmas of empiricism », in *From a logical point of view*, Cambridge. Massachusetts, 1953, p. 20-46, et « Carnap and Logical Truth », in *Logic and Language*, p. 39-63; (Schilpp, p. 385-406.)

53. Cf. Dummett, *op. cit.*, Pitcher, p. 424-425.

54. L'interprétation habituelle des positivistes logiques.

55. Pitcher, p. 425-426.

56. Cf. en particulier *Bemerkungen*, I, 113-155. La conception de Wittgenstein a été souvent étudiée et critiquée; cf., par exemple, The Hardness of the Logical « Must », E. J. Nell (*Analysis*, XXI, 1960-61, p. 68-72); « Wittgenstein and Logical Compulsion », C. S. Chihara (*Ibid.*, p. 136-140, et Pitcher, p. 469-476), « Wittgenstein and Logical Necessity », B. Stroud, (*The Philosopgical Review*, LXXIV, 1965, p. 504-518, et Pitcher, p. 477-496), etc.

« Les démarches que l'on ne met pas en question sont des inférences logiques. Mais, si on *ne* les met *pas* en question, ce n'est pas parce qu'elles « correspondent sûrement à la vérité » — ou quelque chose de ce genre — mais c'est cela précisément que l'on appelle le « penser », « parler », « inférer », « argumenter ». Il ne s'agit pas du tout ici d'une quelconque correspondance de ce qui est dit avec la réalité; la logique est bien plutôt *avant* une telle correspondance; à savoir au sens où la détermination de la méthode de mesure est *avant* la justesse ou la fausseté d'une indication de longueur [57]. »

La force de la règle ne réside donc pas dans le fait que nous sommes obligés de la suivre, absolument parlant, mais dans le fait que nous la suivons effectivement :

« Mais je ne suis donc pas contraint, dans une chaîne d'inférences, de suivre le chemin que je suis ? » — Contraint ? Je peux tout de même bien suivre le chemin que je veux! — « Mais, si tu veux rester en accord avec les règles, tu *dois* (*Du musst*) suivre ce chemin. » — Pas du tout; j'appelle *cela* « accord ». — « Alors tu as modifié le sens du mot « accord » ou le sens de la règle. » — Non; — qui dit ce que veulent dire ici « modifier » et « rester le même » ?

« Tu peux m'indiquer autant de règles que tu voudras — je te donnerai une règle qui justifie *mon* utilisation de tes règles [58]. »

Ou encore :

« Tu n'as tout de même pas le droit d'appliquer maintenant tout d'un coup la loi d'une manière différente! » — Si je réponds à cela : « Ah mais oui! je l'avais en effet appliquée de *cette* façon! » ou : « Ah! c'est de *cette* façon que j'aurais dû l'appliquer —! »; alors je joue le jeu. Mais si je réponds simplement : « D'une manière différente ?— Mais ce n'*est* pas une manière différente! » — que veux-tu faire ? C'est-à-dire que quelqu'un peut répondre comme un homme sensé et cependant ne pas jouer le jeu avec nous [59]. »

L' « inexorabilité » (*Unerbittlichkeit*) des lois logiques, que l'on imagine volontiers supérieure à celle des lois de la nature elles-mêmes, est en réalité à peu près comparable à celle du système métrique. *Nous* nous montrons impitoyables dans l'application de ce système, comme nous le sommes dans celle des règles d'inférence. Parce que nous « mesurons » et « déduisons » et qu'il appartient à l'essence de ces deux activités que nous nous y livrions tous de la même manière [60]. Il en résulte que la « contrainte » logico-mathématique n'est pas fondamentalement différente de n'importe quel autre type de contrainte sociale[61], ce qui explique que l'apprentissage des nombres et du calcul, par exemple, ne soit pas autre chose qu'un impitoyable dressage [62] et que la société sanctionne par des moyens divers, qui vont de

57. *Bemerkungen*, I. 155.
58. *Ibid.*, I, 113.
59. *Ibid.*, I, 115.
60. Cf. *Ibid.*, I, 118; II, 36.
61. Cf. *Ibid.*, I, 116.
62. Cf. *Ibid.*, I, 4.

la simple réprobation de l'entourage à l'asile d'aliénés, les violations de l'ordre logique. Au total, « les lois logiques sont effectivement l'expression d' « habitudes de pensée » [63], mais aussi de l'habitude *de penser*. C'est-à-dire qu'elles montreraient, peut-on dire, comment des hommes pensent et également *ce que* des hommes appellent « penser » [64]. »

En ce qui concerne l'arithmétique courante, nous nous persuadons assez aisément que le professeur de calcul nous parle du nombre 2 à peu près au sens où le professeur de géographie nous parle de la mer du Nord et que, lorsque nous apprenons à compter, que ce soit sur nos doigts, au moyen de bâtons ou dans un système de numération à base quelconque, nous acquérons ou développons à chaque fois une certaine familiarité avec un système unique d'entités bien déterminées, la suite des nombres naturels, dont s'occupe précisément l'arithmétique élémentaire. Wittgenstein, pour sa part, ne cesse de dénoncer l'erreur commune, selon lui, qui consiste à croire que, dans le cas d'un substantif comme, par exemple, « le sens », nous devons rechercher et finalement exhiber quelque chose dont nous soyons autorisés à dire : « c'est cela le sens [65] ». C'est, selon toute apparence, une idée de ce genre qui a amené Frege et Russell à se croire obligés de répondre à la question : « Qu'*est*-ce que le nombre 2 [66] ? ». Il ne faut pas oublier que le sens d'un mot est déterminé d'une manière générale par les règles de son usage et que, dans le cas des signes numériques comme dans celui des pièces du jeu d'échecs, nous en avons assez dit sur le « sens » lorsque nous avons exposé la ou les techniques de manipulation des symboles. Wittgenstein insiste longuement sur le fait que ce qui est essentiel dans le passage d'un système de numération à un autre, par exemple du système incommode des bâtons à la notation décimale, est l'apprentissage d'une technique entièrement nouvelle [67] qui a sa « vie propre [68] », qu'entre les diverses techniques de calcul les questions de priorité et de hiérarchie sont en fait dénuées de sens et que les efforts accomplis par Russell dans les *Principia* pour accéder, au moyen de la technique logique, à une sorte d'essence pré-technique de la mathématique représentent une impressionnante, mais inutile dépense d'énergie.

Si, au lieu de changer simplement de système de numération, nous chan-

63. On ne doit surtout pas en conclure que l'interprétation de Wittgenstein est une vulgaire forme de psychologisme, car il ne s'intéresse nullement à « ce qui se passe dans » l'esprit, mais plutôt à ce qui se passe sur le papier.

64. *Ibid.*, I, 131; cf. 133 : « Les propositions de la logique sont des « lois de la pensée », « parce qu'elles expriment l'essence de la pensée humaine » — mais plus exactement : parce qu'elles expriment, ou montrent, l'essence, la technique de la pensée. Elles montrent ce qu'est la pensée et également des espèces de pensée. »

65. Cf. *Le Cahier Bleu.*

66. Cf. *Wittgenstein's Lectures in* 1930-33, p. 7. Ce que Wittgenstein reproche à Frege, c'est de vouloir préserver, derrière la diversité des signes (||, 2, II, etc.) et la diversité des « sens » (*Sinne*) ($1 + 1$, $6 : 3$, $\sqrt{4}$, etc.) une identité de « signification » (*Bedeutung*) ou d'« objet » (*Gegenstand*) (le nombre 2).

67. Cf. *Bemerkungen*, II, passim.

68. *Ibid.*, II, 51.

geons de système de nombres, c'est-à-dire procédons à ce qu'on est convenu d'appeler les « extensions successives de la notion de nombre », nous ne faisons encore que créer de nouveaux jeux mathématiques, plus compliqués et plus « intéressants » à certains égards que les précédents, mais qui ne leur sont pas plus supérieurs que, pour reprendre une formule de Wittgenstein, le « système de projection » qui envoie « 2 + 3 » sur « 5 » n'est « inférieur » à celui qui envoie « 11 + 111 » sur « 11111 » [69]. Une nouvelle technique de calcul nous fournit un nouveau mode d'expression et nous ne pouvons rien faire de plus absurde, selon Wittgenstein, que d'essayer de décrire le nouvel appareil que nous nous donnons au moyen des anciennes expressions [70]. Cela signifie évidemment que les comparaisons (légitimes) que nous pouvons établir entre les divers jeux mathématiques doivent être dépouillées de toute intention « réductrice [71] ».

Comparer entre eux des jeux appartenant à une même « famille », c'est faire ressortir des invariants, des analogies, des différences etc., mais il ne faut pas oublier que tout jeu digne de ce nom se suffit parfaitement à lui-même : il n'en « fonde » pas plus d'autres que ceux-ci ne le « complètent ». Aussi importe-t-il, dans les mathématiques plus que partout ailleurs, de se guérir de cette maladie philosophique de la réduction à l'unité, de cette hérésie « socratique » que dénonce le *Cahier Bleu* [72]. Lorsque je dis qu'un nombre fractionnaire, à la différence d'un nombre cardinal, n'a pas de successeur immédiat, je ne fais que confronter deux jeux; c'est, dit Wittgenstein, à peu près comme si je faisais remarquer qu'aux dames il y a un coup qui consiste à passer par-dessus un pion et qui n'existe pas aux échecs [73].

Cette façon de voir a notamment l'avantage de supprimer quelques-unes des difficultés traditionnellement attachées à la représentation de l'infini mathématique. Lorsque je prends conscience de l'impossibilité d'ordonner les nombres fractionnaires en série par ordre de grandeur (autrement dit du fait que l'ensemble des rationnels est « dense »), je me laisse facilement déconcerter par le spectacle vertigineux d'une série infinie de choses disposées de telle manière qu'entre chacune d'elles et sa voisine on peut toujours en faire apparaître de nouvelles. L'erreur serait ici une sorte d'émerveillement cantorien devant un des « mystères » (un des plus anodins) du transfini : croire que nous pénétrons dans les arcanes de l'univers mathématique [74], alors que, si l'on en revient à ce qui est réellement en question, la technique du calcul des fractions, aucun élément d'étrangeté ne subsiste en fin de compte. Que, dans la technique du calcul des fractions, l'expres-

69. « Wittgenstein's Lectures in 1930-33 ». p. 8.

70. Cf. *Bemerkungen*, II, 12. Pour Wittgenstein, on n'insistera jamais assez, par exemple, sur le fait que le nombre réel 2 est quelque chose de totalement différent du rationnel 2 et de l'entier naturel 2.

71. Ce qui fait en principe d'une entreprise comme l'« arithmétisation de l'analyse » une pure absurdité...

72. Cf. p. 48-53.

73. Cf. *Bemerkungen*, I, Anhang II, 13.

74. Cf. *ibid.*, 10.

sion « la fraction immédiatement plus grande qu'une fraction donnée » n'ait pas de sens, que nous ne lui en ayons pas donné, voilà qui n'a décidément rien de mystérieux [75].

La même interprétation « grammaticale » s'applique d'une manière générale à tous les problèmes qui semblent concerner directement les « êtres » mathématiques et leurs propriétés. Nous avons toujours tendance à croire que ce qui est en cause, c'est l'existence ou la nature de quelque chose qui est en soi indépendant de nos démarches et de notre technique, alors qu'il s'agit simplement de savoir si tel ou tel jeu nous autorise à procéder de telle ou telle manière et nous garantit l'obtention de tel ou tel résultat. Dans l'Appendice II à la Partie I des *Remarques*, Wittgenstein dénonce quelques-unes des méprises philosophiques nées de la mésinterprétation ensembliste de l'expression « non-dénombrable [76] ». Le danger de certaines tournures de langage comme : « On ne peut ordonner en série les nombres réels » ou : « L'ensemble... n'est pas dénombrable » réside dans le fait qu'elles font apparaître « ce qui est une détermination de concept, une formation de concept (*Begriffsbildung*), comme un fait de nature [77]. »

Critiquant le procédé diagonal utilisé par Cantor pour construire un nombre réel qui ne fasse pas partie d'une énumération présumée complète des éléments de l'ensemble des réels, Wittgenstein fait remarquer que cet artifice technique sert essentiellement à agiter le spectre du nombre diagonal devant les yeux de celui qui s'obstinerait de façon stupide, jour après jour, à vouloir « disposer tous les nombres irrationnels en une série [78] », et qu'il signifie en réalité modestement ceci : « Si on appelle quelque chose une série de nombres réels, alors le développement du procédé diagonal s'appelle aussi un « nombre réel » et on dit, de plus, qu'il est différent de tous les membres de la série [79]. »

Du point de vue ultra-constructiviste qui est celui de Wittgenstein, la démonstration de Cantor se présente donc comme une « démonstration vantarde » (*prahlerischer Beweis*) qui prouve plus que ses moyens ne le lui permettent. Finalement, au lieu de conclure « honnêtement » que le *concept* « nombre réel » a beaucoup moins d'analogie avec le concept « nombre cardinal » que ne le suggèrent certaines similitudes trompeuses, il invite, au contraire, à comparer en grandeur l' « ensemble » des nombres réels et

75. Cf. *ibid.*, 11.

76. Il vaudrait mieux, selon lui, à propos des nombres rationnels, utiliser, au lieu du terme « dénombrable » (*abzählbar*), le terme « numérotable » (*numerierbar*), pour ne pas être tenté de croire que le concept du « dénombrable » contient, en pareil cas, autre chose qu'une possibilité technique de numérotation. Cf. IV, 15 : vouloir « compter » les nombres rationnels n'a pas de sens, mais on peut avoir besoin de leur affecter des indices...

77. I, Appendice II, 3.

78. *Ibid.*, 2.

79. *Ibid.*, 3; c'est-à-dire que parler de la série de *tous* les nombres réels n'a pas de sens, parce qu'on appelle également « nombre réel » le nombre diagonal de la série. Il s'agit d'un état de choses institutionnel et non d'une révélation surprenante concernant une espèce déterminée du « règne numérique » (*Zahlenreich*).

l' « ensemble » des nombres cardinaux, ramenant une différence d'espèce à une simple différence d'extension [80].

On aurait tort de croire que Wittgenstein se borne, d'une manière générale, à reprendre certaines critiques intuitionnistes contre l'utilisation de l'infini actuel en mathématiques et contre toute espèce de procédure non constructive. Certes, protestant contre l'hypostase ensembliste des extensions infinies, il ne cesse de nous rappeler qu'une expression comme : « Il n'y a pas de nombre cardinal plus grand que tous les autres » signifie seulement que « l'autorisation de jouer à des jeux de langage avec des nombres cardinaux n'a pas de fin [81] » et que « les concepts dans les propositions mathématiques qui traitent des fractions décimales illimitées ne sont pas des concepts de séries, mais de la technique non limitée du développement de séries [82] » que nous avons affaire ici à une « technique sans fin » et non à quelque « extension gigantesque [83] », autrement dit que nous n'avons nul besoin de nous représenter la coprésence de toutes les décimales de π dans une sorte d'« espace mathématique » ou dans un entendement divin [84] et que le mot « infini » doit être évité en mathématiques partout « où il semble prêter une signification au calcul; au lieu de la recevoir d'abord de lui seul [85] ».

Mais il est facile de se rendre compte que, prises à la lettre, les affirmations de Wittgenstein impliquent une forme de constructivisme beaucoup plus radicale que tout ce à quoi nous ont accoutumé les empirismes les plus limitatifs. Pour prendre un exemple simple de procédure effective [86], le plus constructiviste d'entre nous admettra généralement que la proposition : « Tout nombre naturel est premier ou composé » est une proposition mathématique douée de sens et de surcroît vraie, si l'on entend par là que nous possédons un « algorithme » de décision, fondé sur le crible d'Eratosthène, qui nous permet de reconnaître, quel que soit le nombre naturel envisagé, s'il est premier ou non. Pour Wittgenstein, la possibilité (théorique) d'appliquer la méthode du crible d'Eratosthène à des nombres aussi grands qu'on voudra ne suffit pas à justifier une affirmation de ce genre; car il est clair que, pour des nombres extrêmement (ou même moyennement) grands, nous nous doterons d'instruments de décision plus puissants et que si, par hasard, un individu courageux, ayant consacré son existence entière à faire le calcul par la méthode du crible, arrivait à un résultat différent du nôtre, nous affirmerions sans hésiter qu'il s'est trompé dans ses calculs. Nous nous imaginons à tort que l'utilisation de deux méthodes différentes, par

80. Cf. *ibid.*; et, par exemple, *Investigations philosophiques*, 67-68.

81. I, Appendice II, 5.

82. *Ibid.*, IV, 19.

83. *Ibid.*,; cf. IV, 36 : « *Aber die Gerade ist ein Gesetz des Fortschreitens.* »

84. Cf. *Ibid.*, V, 34.

85. I, Appendice II, 17. Un peu plus loin, Wittgenstein ajoute : « Finitisme et behaviorisme sont des orientations tout à fait similaires. Tous les deux disent : mais il n'y a là rien d'autre que... » (*Ibid.*, 18).

86. Cf. Dummett, *op. cit.*, Pitcher, p. 439-442.

exemple, pour l'attribution de la propriété « premier » à certains nombres naturels est sans conséquence véritable, de même que nous croyons généralement que le calcul sur des figures décimales ne fait qu' « abréger » de façon innocente le calcul sur des séquences de bâtons. Dans un énoncé comme celui qui est en discussion sont impliqués en réalité plusieurs « concepts » et plusieurs « critères ». Le sens du mot « premier » est déterminé, dans le cas des petits nombres, par la méthode du crible d'Eratosthène, dans le cas de « nombres inaccessibles » (pour cette méthode) éventuellement par quelque autre critère autonome, qui nous sert, le cas échéant, d'étalon pour juger les résultats de la performance que constituerait l'utilisation du crible.

Autrement dit « la » propriété « premier » n'est pas « reconnue », mais construite par des procédés divers et nous ne pouvons pas donner *un* sens à la proposition : « Tout nombre naturel est premier ou composé », pas plus que nous n'avons le droit de passer du langage « conceptuel » au langage ensembliste et de dire par exemple : « L' « ensemble » des nombres premiers est récursif. » On voit jusqu'où doit aller en principe la prise au sérieux de la « technicité » multiforme des mathématiques [87].

Si nous supposons donnée une démonstration du fait que la séquence « 777 » apparaît, à un endroit non précisé, dans le développement décimal de π, il est clair que nous considérons ce développement d'un point de vue tout à fait nouveau : c'est comme si nous devions, pour ainsi dire, admettre l'existence, très loin dans π, d'une zone obscure de longueur indéterminée, dans laquelle nous ne pouvons plus nous fier à nos recettes de calcul, et, plus loin encore, d' « une zone où nous pouvons à nouveau, d'une *autre* manière, y voir quelque chose [88]. » C'est évidemment dans une même perspective qu'il faut comprendre la condamnation, par Wittgenstein, de toutes les procédures « vantardes » et le besoin destructeur de les réduire à ce qu'il croit être leur juste fonction; c'est dans le même esprit finitiste, behavioriste et pluraliste qu'il polémique tour à tour contre la méthode de la diagonale, contre les utilisations indues du tiers-exclu, contre les *Begriffsbildungen* imprédicatives de l'analyse et, de façon tout à

87. Pour Wittgenstein, le sens d'une proposition mathématique est déterminé par la démonstration (ou la réfutation) que nous en donnons, et la démonstration doit être « *übersehbar* » (*capable of being taken in* » dit la traduction anglaise); cf. *Bemerkungen*, II, passim. En ce qui concerne le problème évoqué ci-dessus, il est évident que, quel que soit le « critère » utilisé, nous finirons toujours par trouver un nombre « inaccessible » selon ce critère, c'est-à-dire pour lequel l'application du critère cessera d'être « *übersehbar* »,autrement dit de pouvoir être considérée comme une démonstration; encore que la question de savoir à quel moment précis nous tomberons sur un nombre « inaccessible » soit de nature essentiellement sophistique, comme le problème du « tas » ou du « chauve. » Ce qui est clair, en tout cas, comme essaie de le montrer Dummett, c'est que, dans ce débat, Wittgenstein ne raisonne pas, à proprement parler, en termes de possibilité « pratique » et de possibilité « théorique ». Sa position représente, au total, une forme particulièrement rigoureuse de « finitisme » ou d'« anthropologisme », qui impliquerait à la limite que deux mathématiciens n'ont pas le même concept de π si l'un en a calculé plus de décimales que l'autre. Il est vrai que, pour lui, π n'est pas exactement un « concept », mais plutôt une loi de formation de concepts... Cf. IV, 9.

88. *Bemerkungen*, IV, 27.

fait générale, contre les prétentions réductrices de la logique d'une part, les procédés « prospectifs » et abréviateurs de la métamathématique d'autre part.

Considérons en effet le traditionnel énoncé « $7+5=12$ [89] »; nous pouvons estimer qu'une démonstration logiciste effectuée dans la notation russellienne en constitue la justification dernière effective. Mais une telle démonstration a ceci de caractéristique précisément qu'elle est démesurément longue, compliquée et artificielle et que nous ne l'entreprenons jamais : tout au plus nous y référons-nous éventuellement comme à quelque chose de possible « en principe ». Ce que nous avons dit de la signification attribuée par Wittgenstein à l'utilisation d'une notation déterminée, interdit, par ailleurs, de considérer que, si nous abrégeons d'une manière ou d'une autre l'énoncé et sa démonstration en introduisant de nouveaux symboles, nous avons bien fourni *la* démonstration demandée. Autrement dit, ce n'est pas une transcription et une démonstration dans la notation de la théorie des ensembles ou du calcul des prédicats qui justifie *réellement* l'affirmation de l'égalité « $7+5=12$ ». L'énoncé en question, déposé une fois pour toute dans nos archives et décrété inattaquable, n'a pas besoin d'être « légalisé » : il a, au contraire, force de loi et nous sert à tester, du point de vue de leur rectitude, les démarches inutilement longues et compliquées que nous pourrions être tentés d'effectuer dans un système logique formel avec la prétention de l'établir par une procédure « fondatrice [90] ».

Quant aux raisonnements métamathématiques que nous effectuons pour anticiper certains résultats et aux théorèmes métamathématiques que nous utilisons par exemple pour abréger certaines démonstrations formelles, Wittgenstein incline à les regarder — lorsqu'il leur donne un sens — comme faisant encore partie de la mathématique proprement dite, comme des raisonnements et des théorèmes mathématiques au sens usuel du

89. On notera, à ce propos, qu'en ce qui concerne l'arithmétique, Wittgenstein emprunte presque toujours ses exemples, à un domaine assez particulier : celui des équations numériques déterminées, qui, comme le fait remarquer Bernays, « sont normalement considérées, non comme des propositions à démontrer, mais comme de simples énoncés ». Il s'occupe plus en fait des fondements du calcul numérique que de ce que les mathématiciens appellent ordinairement arithmétique ou théorie des nombres. Aussi donne-t-il, par endroits, l'impression de ne faire aucune distinction entre une formule numérique déterminée et un « théorème » ou une « loi ».

90. Wittgenstein serait sans doute d'accord avec les intuitionnistes pour dire que la série des nombres naturels et les opérations sur ces nombres correspondent à quelque chose de plus « élémentaire » que ce qui est en jeu dans la reconstruction logiciste et, d'autre part, que les mathématiques sont déjà impliquées fondamentalement dans les procédures logiques les plus simples sous la forme du dénombrement, de l'itération, etc. Mais, pour lui, cela signifie simplement que, dans le débat, l'arithmétique est toujours juge, et jamais jugée. Nous pouvons être convaincus, sur la foi d'une égalité arithmétique, que nous avons commis une erreur dans une démonstration « russellienne »; mais l'inverse n'arrive jamais. Le passage suivant mérite, dans cette perspective, d'être souligné : « Je n'ai pas encore rendu clair le rôle de l'erreur de calcul. Le rôle de la proposition « Je ne peux pas ne pas m'être trompé dans le calcul. » Elle est, à proprement parler, la clé pour la compréhension des « fondements » des mathématiques » (*Bemerkungen*, II, 90).

terme [91]. On ne peut pas considérer, cependant, que son argumentation et ses exemples soient, sur ce point, ni très clairs, ni très concluants. Utilisant son exemple favori, celui du jeu d'échecs, il s'appliquera, par exemple, à montrer que ce qui se passe lorsque nous effectuons des prévisions dans une prétendue « théorie du jeu d'échecs » est exactement ce qui se passe dans le jeu, au mouvement des pièces près [92]. Un peu comme lorsque nous résolvons un problème d'échecs sur le papier au moyen d'un symbolisme approprié. Tout au plus certains aspects de la « théorie » obligent-ils à la considérer comme un *nouveau* calcul qui se rapporte au premier comme l'algèbre au calcul numérique [93]. Wittgenstein veut essentiellement nous convaincre que la métamathématique, en tant que « géométrie » des configurations de symboles, est encore un calcul et non une « théorie », autrement dit que nous n'accédons jamais à une « théorie de la démonstration », mais uniquement à de nouvelles démonstrations [94], ce qui revient à former de nouveaux « concepts », adopter de nouveaux « critères », introduire de nouveaux « paradigmes » dans le langage, etc., bref que le prétendu « méta-jeu » ne nous parle jamais du jeu et que tout ce qui se dit de tel se dit « en prose [95] ».

Nous avions déjà évoqué l'attitude générale de Wittgenstein à l'égard des problèmes d'« existence ». On pourrait croire que même une philosophie des mathématiques comme la sienne ne peut récuser entièrement certains aspects de cette problématique; car, si l'on interprète, avec les formalistes, l'existence mathématique comme la simple non-contradiction, il paraît légitime et indispensable de se demander, sans mettre en cause aucune espèce d'« entités », si les règles du « jeu » mathématique, au même titre que

91. « Ce que fait Hilbert est de la mathématique et non de la métamathématique. C'est à nouveau un calcul, tout aussi bien que n'importe quel autre » (*Philosophische Bemerkungen*, p. 319). Cette appréciation (nettement antérieure à l'époque des *Remarques*) concerne en particulier une publication de 1922 : « Neubegründung der Mathematik », *Abhandl. aus dem Math. Seminar d. Hamb. Univ.*, Bd. I, p. 157-177. On peut objecter à Wittgenstein que la métamathématique ambitionne précisément d'être une sorte de mathématique des théories mathématiques elles-mêmes. Mais Wittgenstein ne croit pas que nous puissions traiter mathématiquement *de* la mathémathique. Nous ne faisons en réalité, dans le meilleur des cas, qu'inventer de nouveaux modes d'expression mathématiques, parce que, comme il le dit, « *das Spiel grenzt nicht an das Nichtspiel an* », on ne sort pas du jeu.

De la critique presque toujours imprécise, allusive et métaphorique de Wittgenstein, telle qu'elle est exposée dans les *Remarques*, on ne peut guère extraire au total, semble-t-il, que l'idée générale selon laquelle, eu égard au caractère essentiellement conventionnel d'une part, et créateur d'autre part, des mathématiques, vouloir « démontrer » quelque chose concernant la totalité des démonstrations possibles dans une théorie est une entreprise dénuée de sens.

92. Cf. *Philosophische Bemerkungen*, p. 327.

93. Cf. *ibid.*, p. 330.

94. Notons en passant qu'un conventionaliste conséquent ne peut accorder de signification véritable au fait que la métamathématique, à la différence de la mathématique formelle, use de procédés finitistes, constructifs, intuitifs, etc.

95. Il serait évidemment intéressant de pouvoir donner *un* sens précis, chez Wittgenstein à des mots-clés comme *Begriff, Kriterium, Bild*, etc. Mais il ne faut pas oublier qu'un de ses objectifs principaux est de nous guérir de l'obsession philosophique de l'univocité (mère de la métaphysique essentialiste) et que, par conséquent, nous ne pouvons pas espérer faire correspondre aux termes en question autre chose qu'une « famille » de sens (c'est-à-dire d'emplois). En ce qui concerne le mot *Begriff*, cf., par exemple, *Bemerkungen*, V, 35, 38.

celles de n'importe quel autre jeu, ne risquent pas de se révéler un jour contradictoires : en dehors même de toute question concernant les « objets » mathématiques litigieux, il semble essentiel, et en tout cas intéressant, de s'assurer que le jeu ne comporte pas de vice de fonctionnement radical et ne nous réserve pas de surprises désagréables. Nous sommes naturellement enclins à considérer que l'apparition d'une contradiction dans le cours du jeu constituerait une catastrophe irrémédiable et qu'il y a lieu de se prémunir contre ce genre de désastre en se donnant, dans une sorte de théorie du jeu, une idée exhaustive rassurante des possibilités et des impossibilités du jeu. Pour toutes sortes de bonnes et de mauvaises raisons, qu'il faut essayer de tirer au clair, Wittgenstein estime que cette préoccupation n'est pas réellement fondée et qu'elle résulte une fois de plus de l'utilisation confuse de certains termes comme « axiome », « règle », « proposition », « contradiction », « vrai », « faux », etc.

3. Le problème de la consistance du point de vue des jeux de langage.

Wittgenstein précise dans les *Remarques* que son but est de modifier l'attitude (*Einstellung*) à l'égard de la contradiction et des démonstrations de non-contradiction, dont il n'est pas question de dire qu'elles ne montrent rien qui vaille la peine, mais seulement qu'elles ne montrent sans doute pas ce que l'on croit généralement [96]. Tantôt il affecte de considérer que la détection de la contradiction est une recherche au hasard et que, un peu à la manière des supputations que nous faisons sur des zones éloignées du développement décimal de π, de l'hypothèse de Riemann sur les zéros de la fonction zêta ou encore, selon toute apparence, du « théorème » de Fermat [97], elle appartient à une partie conjecturale plus ou moins nébuleuse des mathématiques pour laquelle, en opportuniste et finitiste convaincu, il n'a évidemment pas grande sympathie : nous avons affaire ici à un besoin maladif de « prévoir » qui se satisfait par des voies douteuses et qu'il est bon de réprimer, de temps à autre, par un « Nous verrons bien ! » décidé.

En ce qui concerne la problématique de la consistance, Wittgenstein est d'avis que, tant que nous pouvons « jouer » nous n'avons pas à nous inquiéter sérieusement de savoir si nous ne finirons pas par aboutir à une

96. Les précautions de ce genre sont fréquentes chez Wittgenstein et, à vrai dire, difficiles à prendre au sérieux : « Ma tâche n'est pas d'attaquer la logique de Russell de *l'intérieur*, mais de l'extérieur. C'est à-dire qu'elle ne consiste pas à l'attaquer mathématiquement — car alors je ferais des mathématiques — mais à attaquer sa position, sa fonction. Ce n'est pas ma tâche de discourir sur la démonstration de Gödel, par exemple; mais de tenir un discours *qui passe à côté* d'elle » (*an ihm vorbei zu reden*, c'est nous qui soulignons), *Bemerkungen*, V, 16.

97. Pour Wittgenstein, dire que nous sommes incapables de le démontrer, c'est dire que nous ne pouvons pas lui donner de *sens*. Peu importe que Fermat ait été, pour sa part, en mesure de démontrer le « grand » théorème, ce dont d'ailleurs, comme on sait, Gauss doutait.

contradiction. Un jeu mathématique, c'est d'abord une technique de calcul et « le calcul *en tant que* calcul est en ordre [98] ». Vouloir repérer en quelque sorte *a priori* une contradiction éventuelle comme une sorte de « tuberculose » ou de « cancer » des axiomes n'a pas de sens : il est toujours possible et, du reste, facile de résoudre concrètement le problème par une décision adéquate, lorsque les règles entrent effectivement en conflit les unes avec les autres [99]. Wittgenstein fait remarquer à ce propos — et il est difficile de le contredire — que si nous réussissions un jour à faire apparaître réellement une contradiction dans l'arithmétique, cela prouverait seulement qu'une arithmétique contradictoire en ce sens-là est susceptible de rendre les plus grands services et il vaudrait mieux envisager de modifier notre idéal mathématique que de conclure que nous n'avons pas encore eu d'arithmétique véritable [100].

Tantôt, comme on peut s'y attendre, Wittgenstein insiste sur le fait que, d'une manière générale, la contradiction et la non-contradiction n'ont pas de signification absolue, mais correspondent à des situations purement linguistiques et conventionnelles. Nous pouvons, par exemple, appeler contradiction, dans le calcul, une certaine configuration de symbole ($0 \neq 0$); cela signifie simplement que nous n'autorisons pas la formation de cette configuration. Autrement dit, nous déterminons *un* jeu par permission et interdit lorsque nous l'admettons et, de la même manière, un autre jeu lorsque nous l'excluons. L'erreur de Hilbert, c'est de vouloir démontrer que les axiomes « de l'arithmétique ont les propriétés *du* jeu, et c'est impossible [101] ».

Les choses se présentent donc en gros de la façon suivante : tant que nous restons dans le calcul, les configurations du jeu ne peuvent représenter une contradiction que si nous convenons d'appeler de ce nom et d'exclure comme intolérable l'une d'entre elles. La contradiction véritable est l'impossibilité reconnue d'appliquer les règles dans certaines circonstances — comme, par exemple, s'il est dit que le pion blanc doit passer par-dessus le pion noir et que celui-ci se trouve au bord du damier —; mais elle n'a pas d'importance réelle tant que nous ne la remarquons pas et que nous en sommes à essayer de la dépister comme une « maladie intime [102] » du calcul.

98. *Philosophische Bemerkungen*, p. 319.

99. Si la mathématique est réellement, comme le croit Wittgenstein, une « institution », la venue au jour d'une contradiction ne met pas plus en question son existence que la présence de deux prescriptions en fin de compte contradictoires dans le Code ne met en question celle du Droit.

100. Cf. *Bemerkungen*, V, 28, *Philosophische Bemerkungen*, p. 345-346.

101. *Philosophische Bemerkungen*, p. 321. Cf. *Bemerkungen*, IV. 13 : « La proposition générale qui dit que telle figure n'apparaît pas dans le développement, ne peut être qu'un *commandement*. » L'attitude normale consiste évidemment à dire que la contradiction et la non-contradiction ne sont pas une affaire de décision et que nous sommes en présence de possibilités et d'impossibilités combinatoires objectives. Mais les *Remarques* s'efforceront de montrer précisément que les données initiales du jeu ne sont pas contraignantes au sens où nous l'entendons habituellement et que, par conséquent, il est vain de chercher dans les axiomes, à l'état de « préformation », une sorte de perversion radicale du calcul, dont la possibilité de déduire une absurdité reconnue comme « $a \neq a$ » constituerait le symptôme irrécusable. (En réalité la contradiction ne réside pas à proprement parler dans l'apparition de la figure « $0 \neq 0$ », mais dans la co-démontrabilité formelle de « $0 = 0$ » (instance de l'axiome logique « $x = x$ ») et de « $0 \neq 0$ »).

102. Cf. *Bemerkungen*, II, 80.

Nous n'appelons pas contradiction, en arithmétique, la figure 0/0; et pourtant il s'agit d'une de ces rencontres embarrassantes qui nous mettent, pour ainsi dire, « au bord de l'échiquier », car, si nous disons que 0/0 = 1, pour obéir à une règle générale, nous entrerons en conflit avec d'autres règles du jeu [103]. Dans la discussion avec Waismann, Wittgenstein fait observer que la peur des mathématiciens devant la contradiction est quelque chose d'assez irrationnel. Qu'est-ce en effet, à proprement parler, qu'une contradiction ? Le produit logique d'une proposition et de sa négation; mais un énoncé de cette forme « ne nous dit rien », il est, comme la tautologie, « vide de sens »; or les mathématiciens ne craignent pas de formuler des tautologies, mais rien ne les effraie tant que l'idée de rencontrer une proposition contradictoire, qui n'est pourtant pas plus redoutable en soi : on pourrait aussi bien étudier la logique avec des contradictions [104]. Quant à la situation conflictuelle qui naît de l'incompatibilité de deux règles, c'est évidemment quelque chose de tout différent, et que nous pouvons en quelque sorte faire et défaire à volonté.

Nous avons l'habitude de considérer le principe de non-contradiction comme une sorte de « loi fondamentale » de la pensée, une loi qui transcende toute logique constituée, tout jeu de langage et toute technique [105] et nous avons du mal à croire qu'il puisse exister des jeux où la contradiction joue un rôle positif, sinon essentiel :

« « La contradiction supprime le calcul » — d'où lui vient cette position à part. On peut certainement, à mon avis, l'ébranler avec un peu d'imagination.

» Pour résoudre ces problèmes philosophiques, il faut comparer entre elles des choses qu'il n'est encore venu sérieusement à l'esprit de personne de comparer [106]. »

Hantés par le « spectre » (*Gespenst*) de la contradiction, nous nous évertuons en quelque sorte à prendre nos instruments linguistiques en flagrant délit d'« inconsistance », et, pour ce faire, nous construisons des énoncés marginaux déconcertants dont la fonction exacte dans le jeu et le sens précis nous échappent ou que nous interprétons de travers, qui ne sont rien de plus que l'expression d'un embarras artificiel et auxquels nous attribuons sans discernement une signification catastrophique. On peut, en réalité, concevoir une langue où la classe des lions s'appelle « le lion de tous les lions [107] » et si l'on se demande quel rôle un énoncé comme : « Je mens

103. Cf. *Philosophische Bemerkungen*, p. 322.

104. Cf. *Philosophische Bemerkungen*, p. 325, et *Tractatus*, 6.1202 : « Il est clair que dans le même but on pourrait utiliser aussi les contradictions au lieu des tautologies. »

105. Cf. *Bemerkungen*, III, 55-60.

106. *Ibid.*, V, 12. Wittgenstein fait de louables efforts d'imagination dans ce sens, suggérant des jeux de langage baroques, évoquant des systèmes de mesure avec étalons déformables, etc. Il s'efforce ainsi avec plus ou moins de bonheur, de désamorcer un certain nombre de dispositifs « détonants » : « le « $\sim f(f)$ » « de Russell » (cf. V, 8), l'antinomie de Grelling (V, 21), la division par zéro (V, 11, par exemple), etc.

107. *Ibid.*, V, 29; on pourra alors, dit Wittgenstein, construire le paradoxe selon lequel il n'y a pas de nombre cardinal déterminé de tous les lions...

toujours » peut jouer dans la vie humaine, il est possible, dit Wittgenstein, d'« imaginer diverses choses [108] ».

Mais, dirons-nous, ce qui est en question est quelque chose de bien plus grave. On peut toujours dire à la rigueur que la possibilité de construire dans notre langage l'antinomie du menteur ne tire pas à conséquence et que le paradoxe de Russell ne concerne pas réellement les mathématiques, mais une sorte d'excroissance cancéreuse qui s'est développée à partir du corps normal [109]; mais l'éristique philosophique, qui n'a jamais cessé d'exploiter les obscurités et les confusions du langage, ne joue manifestement aucun rôle dans l'inflation caractéristique de la problématique de la consistance, en ce qui concerne les mathématiques proprement dites. Il y a bien là une question de vie ou de mort pour les systèmes hypothético-déductifs : il est extrêmement important en effet de pouvoir s'assurer par une démonstration hilbertienne que nous ne parviendrons jamais à déduire une contradiction d'un système donné d'axiomes. Car nous ne pouvons pas considérer comme un simple accident local la possibilité de démontrer à la fois, dans une théorie mathématique, une formule et sa négation : il résulterait en effet de cette situation que n'importe quelle formule du système y deviendrait une thèse et que, comme le faisait observer Waismann à Wittgenstein, le jeu perdrait « son caractère et son intérêt [110] ». Mais si l'on admet la critique du fondement de la déduction, telle qu'on la trouve exposée dans les *Remarques*, c'est-à-dire le fait que « chacun de nos jugements est indépendant [111] », il est clair que la rencontre d'une figure comme « $0 \neq 0$ » ne peut avoir la signification que nous lui prêtons et constituer une « preuve » que notre jeu n'en est pas un en fait; que nous pouvons toujours, « avec un peu d'imagination », continuer à jouer et redonner, si besoin est, de l'intérêt au jeu, etc.

Aussi peu disposé que l'on soit à admettre les théories destructrices de Wittgenstein, on lui accordera néanmoins sans trop de peine que nos « jeux » mathématiques remplissent en un sens parfaitement leur fonction et que nous pouvons toujours à la rigueur continuer à additionner, multiplier, différentier, intégrer, etc., sans souci du lendemain, que notre foi dans l'avenir des mathématiques repose en fait beaucoup plus sur l'expérience que sur les résultats limités obtenus dans le domaine des démonstrations de non-contradiction [112], enfin que nous sommes à peu près certains *a priori* de pouvoir nous tirer d'affaire, en cas de malheur, par une révision appropriée, ce qui prouve qu'au fond, comme il le veut, nous mesurons beaucoup plus nos idéaux mathématiques à la mathématique existante que l'inverse et que nous renoncerons toujours plus facilement à ceux-là qu'à celle-ci.

Considérons à nouveau la situation particulière créée dans un système de jeu par l'apparition d'une figure réputée contradictoire. Indépendamment

108. Cf. *Ibid.*, V, 30. — 109. Cf. *Ibid.*, V, 8. — 110. *Philosophische Bemerkungen*, p. 326. — 111, Cf. Cowan, *op. cit.*, p. 363. — 112. Cf. l'« esprit réaliste » dans lequel Bourbaki envisage la question de la non-contradiction, *Éléments de mathématique*, *Théorie des ensembles*, chap. 1 et 2, Fascicule XVII, Hermann, 1966, Introduction, p. 7-9.

du fait que nous pouvons « jouer » un certain temps avant de la rencontrer et que, dans ce cas, le jeu aura tout de même été intéressant [113], il faut remarquer d'abord que la contradiction n'est réellement gênante que sous la forme déclarative de l'information contradictoire, là où nous avons besoin d'être informés, et que, pour Wittgenstein, les mathématiques ne nous apportent pas d'information véritable et ne constituent pas, en tant que telles, un savoir [114]; ensuite que le mal que nous nous donnons pour établir la consistance de nos systèmes formels se justifie en dernier recours par le fait qu'ils doivent, pour mériter quelque intérêt, être « interprétables », « applicables », etc. Mais si on laisse de côté les parties de la mathématique dont l'application se laisse difficilement concevoir et dont on peut toujours douter, pour cette raison, qu'elles appartiennent bien, de façon constitutive, au domaine des mathématiques, que reste-t-il, selon Wittgenstein? Un ensemble extrêmement diversifié de procédures de calcul que nous utilisons depuis longtemps avec succès et dont la réussite n'a pas besoin de justification « transcendantale ». Se demander comment les mathématiques sont possibles, c'est un peu se demander comment le système métrique est possible : ce qui règle la question de l' « objectivité » des mathématiques, c'est qu'un énoncé mathématique n'est pas une indication de longueur dont nous pourrions être tentés de contrôler l'exactitude, mais une règle de mesure; et c'est encore un manque d'imagination qui nous empêche de croire que les mesures effectuées avec des instruments élastiques pourraient avoir un sens et une utilité dans certains cas [115]...

« La crainte et la vénération superstitieuse que les mathématiciens éprouvent en face de la contradiction [116] » proviennent essentiellement de la référence implicite constante à un modèle inadéquat : celui du calcul des propositions. Le mot « contradiction » est emprunté au domaine des fonctions de vérité, et il ne peut être question de contradiction au sens propre que là où l'on a affaire à des énoncés. Comme les formules du calcul ne sont pas des énoncés, il ne peut y avoir de contradiction dans le calcul [117]. Bien que Wittgenstein insiste à maintes reprises sur le caractère quasi-propositionnel des mathématiques et soutienne, par exemple, que l'expression « $3 + 3 = 6$ », en tant que règle de grammaire, n'est ni vraie ni fausse [118] ou encore que « 2 fois

113. « Il faut remarquer cependant que, dans les premiers systèmes de Frege et Russell, la contradiction surgit déjà au bout de quelques pas, en quelque sorte à travers la structure de base du système » Bernays, *op. cit.*, Benacerraf et Putnam, p. 522.

114. Cf. *Bemerkungen*, V. 2.

115. Cf. *Ibid.*, V, 12. Wittgenstein emprunte souvent ses exemples et ses métaphores aux techniques de mesure pour contester à la fois que les propositions mathématiques soient des propositions d'expérience et qu'il puisse y avoir un travail mathématique de fondation des mathématiques, quelque chose comme une mesure vérificatrice de nos étalons. Cf. V. 27 : « *Aber kann es denn eine mathematische Aufgabe sein, die Mathematik zur Mathematik zu machen?* ». En III, 15-19, Wittgenstein évoque la possibilité pour un groupe humain de posséder une mathématique appliquée sans avoir aucune idée de ce que pourrait être une mathématique pure.

116. *Ibid.*, I, Anhang, I, 17.

117. Cf. *Philosophische Bermekungen*, p. 339.

118. Cf. Moore, *op. cit.*, p. 300 s.

2 font 4 » n'a qu'un rapport très superficiel avec tout ce que nous appelons « proposition [119], on ne peut, avec la meilleure bonne volonté du monde, admettre qu'il ait à aucun moment clarifié de façon décisive le statut de la « proposition » mathématique par rapport à la « proposition » logique d'une part [120], la proposition « factuelle » d'autre part [121]. Ce qui est clair, c'est qu'il s'efforce d'évacuer dans toute la mesure du possible des mathématiques, à cause de ses résonances métaphysiques, la notion traditionnelle de « loi » au profit exclusif de celle de « règle » et qu'il veut couper court à toutes les interprétations qui font des mathématiques une « théorie », qui attribuent aux expressions symboliques une signification « eidétique », et non pas seulement opérationnelle et à l'activité mathématique une fonction « quidditative », si l'on peut dire, et non pas seulement fabricatrice. L'unité de son discours philosophique sur les mathématiques, c'est d'abord l'unité polémique d'une dénonciation, aussi bien chez Hilbert que chez Frege, Cantor ou Russell, pour ne citer que les plus illustres, de toutes les séquelles modernes de la vieille hérésie contemplative liée aux origines grecques de la mathématique, qui consiste à croire que celle-ci s'occupe d' « essences », d' « universaux », d' « objets idéaux », etc.

Dans cette perspective, le but essentiel de sa polémique contre les démons-

119. Cf. *Bemerkungen*, I, Anhang I, 4.

120. Qui est également considérée parfois comme une « pseudo-proposition »; cf., par exemple, *Bemerkungen*, I, Anhang, I, 20. (Nous ne donnons évidemment pas au mot « pseudo-proposition » le sens habituel de « *Scheinsatz* » chez Wittgenstein et les néo-positivistes logiques...)

121. Dans le *Tractatus*, Wittgenstein considère les énoncés mathématiques comme des tautologies. Ce point de vue logiciste a été renié par la suite au profit de conceptions qui finiront par se rapprocher beaucoup plus, à certains égards, de celles des intuitionnistes. Dans les cours de 1930-33, Wittgenstein soutient encore que les propositions mathématiques sont « vides de sens » et « ne disent rien », et cela en vertu d'une certaine relation à des « règles de grammaire ». Sa position dans les *Remarques* est à peu près impossible à caractériser et, au surplus, d'une cohérence discutable. On peut seulement noter que 1°) Il refuse à maintes reprises et nettement d'attribuer aux propositions mathématiques la fonction de propositions d'expérience. 2°) Il considère néanmoins l'applicabilité comme un attribut essentiel de toute construction mathématique et souligne à l'occasion que cette applicabilité, notamment celle de l'arithmétique, repose sur certaines données empiriques (cf. I, 37, par exemple). 3°) Il continue à soutenir que les propositions mathématiques n'ont pas de fonction descriptive, ne nous apprennent rien, etc., bref que nous ne pouvons tirer aucune information proprement dite d'un domaine autre que celui de la factualité concrète. 4°) Il se rapproche singulièrement, par endroits, de l'interprétation kantienne des énoncés mathématiques, suggérant, par exemple, que la mathématique, au lieu de « nous enseigner des faits », pourrait « créer les formes de ce que nous appelons faits » (V, 15). Les *Remarques* développent des arguments qui font songer nécessairement à Poincaré et à Kant : cf. l'exemple significatif de la distribution des nombres premiers, que Wittgenstein considère comme une sorte de production synthétique *a priori* (III, 42). Le texte se passe de commentaires :

« On pourrait peut-être dire que le caractère synthétique des propositions mathématiques se montre de la façon la plus évidente dans l'apparition imprévisible des nombres premiers.

« Mais, pour être synthétiques (en ce sens-là), elles n'en sont pas moins *a priori*, On pourrait dire, veux-je dire, qu'elles ne peuvent pas être obtenues à partir de leurs concepts par une sorte d'analyse, mais bien déterminent un concept par synthèse, à peu près comme on peut déterminer un corps en faisant se pénétrer des prismes.

« La distribution des nombres premiers serait un exemple idéal pour ce qu'on pourrait appeler synthétique *a priori*, car on peut dire qu'il est, en tout état de cause, impossible de la découvrir par une analyse du concept de nombre premier. »

trations de non-contradiction est de nous convaincre que, si les mathématiques ne sont rien de plus qu'une activité humaine finie, soumise à des règles qui n'ont aucune signification absolue, seuls la persistance de l'illusion réaliste, le désir de s'assurer que les formules mathématiques « nous parlent bien de quelque chose », peuvent expliquer notre phobie de la contradiction [122]. Dans l'univers fermé de la technologie, on peut toujours trouver une solution technique à des difficultés techniques. Ce ne sont jamais les mathématiques, en tant que telles, qui sont menacées, mais seulement une certaine *Weltanschauung* mathématique : seuls des mathématiciens philosophes, ayant admis une fois pour toutes que la structure du monde reposait sur le nombre entier, pouvaient s'effarer devant la « découverte » des nombres irrationnels.

Bien que l'argumentation de Wittgenstein soit souvent assez faible et que, de toute évidence, sur un certain nombre de points fondamentaux concernant notamment le problème de la non-contradiction et le théorème de Gödel, il ne comprenne pas ou ne veuille pas comprendre ce qui est réellement en question [123] et adopte la plupart du temps, à l'égard de l'appareil technique compliqué mis en jeu par la logique symbolique en général et les recherches métamathématiques en particulier, une attitude assez cavalière, on peut néanmoins lui concéder en gros que, si les mathématiques ont avec le jeu d'échecs autant d'analogie qu'il semble le prétendre, l'apparition d'une contradiction ne peut à proprement parler rendre nul et non avenu tout ce qui a pu éventuellement se faire jusqu'alors et n'a, dans tous les cas, rien d'une catastrophe irrémédiable. Mais on pourrait également reprendre à son profit la comparaison et soutenir que la peur de la contradiction chez le mathématicien est tout à faire comparable à la peur d'être mis échec et mat chez le joueur d'échecs, autrement dit qu'elle appartient, comme cette dernière, à l'essence même du jeu, qui n'existerait pas sans elle. L'originalité de Wittgenstein consiste précisément à soutenir que le souci d'éviter la contradiction n'est pas réellement une motivation constitutive dans le jeu mathématique, et il semble bien, de toute manière que, pour prendre vraiment au sérieux la question de la contradiction, il faille considérer les mathématiques comme quelque chose de plus qu'un « jeu », dans tous les sens du mot, ce qui est évidemment le cas chez Hilbert.

Wittgenstein rend compte de l'utilisation des mots « vrai » et « faux » en l'intégrant à un type bien déterminé et relativement restreint de jeux de langage. Lorsque nous disons de certaines propositions qu'elles sont vraies ou

122. Il arrive à Wittgenstein d'essayer d'imaginer une mathématique intégralement prescriptive, où l'élément déclaratif ferait totalement défaut, c'est-à-dire où il n'y aurait aucune « proposition » proprement dite, et où l'accent serait mis tout entier sur le « faire ». Cf. *Bemerkungen*, III, 15-16; IV, 17. Peut-être pourrait-on utiliser ici la distinction d'Austin et dire qu'au fond, pour Wittgenstein, les énoncés mathématiques se rapprochent plus du « performatif » que du descriptif.

123. Voir les observations de A.R. Anderson, « Mathematics and the « Language Game » » in *The Review of Metaphysics*, 11 (March, 1958), repris dans Benacerraf et Putnam, p. 481-490; et de Bernays dans l'article déjà plusieurs fois cité.

fausses, cela signifie que nous jouons avec elles le jeu des fonctions de vérité, autrement dit simplement le jeu des propositions :

« Car l'assertion n'est pas quelque chose qui vient s'ajouter à la proposition [124], mais un trait essentiel du jeu que nous jouons avec elle. A peu près comparable à la caractéristique du jeu d'échecs, selon laquelle il y a gain et perte lorsqu'on y joue, et gagne celui qui prend le roi à l'autre [125]. »

C'est à des positions gagnantes ou perdantes dans un jeu stratégique que Wittgenstein compare le plus volontiers les « propositions » mathématiques, soulignant en particulier que ce qui s'appelle « perdre » dans un jeu, peut signifier le gain dans un autre [126]. Il est vrai que nous réagissons à peu près de la même manière lorsque quelqu'un nous montre une multiplication fausse ou affirme qu'il pleut, alors qu'il ne pleut pas : mais cela signifie seulement que, dans les deux cas, nous sanctionnons une conduite déviante par rapport à des normes; il nous arrive également de faire des gestes d'interdiction lorsque notre chien ne se comporte pas comme nous le souhaitons [127]. Nous traduisons à chaque fois notre réprobation par un « Non ! »; mais celui-ci fonctionne en même temps, implicitement ou explicitement, comme opérateur de vérité dans le second cas, nullement dans le troisième et de façon seulement apparente dans le premier [128]. C'est uniquement en vertu de certaines similitudes trompeuses que nous considérons à peu près de la même manière des énoncés aussi différents que, par exemple, « 1 = 0 » et « Il pleut et il ne pleut pas ». Encore Wittgenstein est-il capable de décourager toute tentative d'interprétation des « vérités » mathématiques (et de sa pensée propre) par un avertissement du type suivant :

« Comprendre une proposition mathématique » — c'est un concept très vague.

« Mais si tu dis « Il ne s'agit absolument pas de comprendre. Les propositions mathématiques ne sont que des positions dans un jeu », c'est également un non-sens! « Mathématique », ce n'est précisément pas un concept nettement circonscrit [129]. »

Nous utilisons les mots « juste » et « faux » pour apprendre à quelqu'un à se conduire selon la règle. Le mot « juste » invite notre élève à poursuivre, le mot « faux » le stoppe. Nous pourrions être tentés, lorsque nous nous

124. Cf. le rejet de l'*Urteilstrich* de Frege dans le *Tractatus*, 4. 442.

125. *Bemerkungen*, I, Anhang I, 2; cf. *Investigations Philosophiques*, 136.

126. Cf. *Bemerkungen*, I, Anhang, I, 8.

127. Cf. *Ibid.*, 4.

128. Comme le fait remarquer Aristote, « ce n'est pas parce que nous pensons avec vérité que tu es blanc, que tu es blanc, mais c'est parce que tu es blanc, qu'en disant que tu l'es, nous sommes dans la vérité » (*Métaphysique*, Θ, 10, 1051 *b* 6). En ce qui concerne les énoncés mathématiques, pour Wittgenstein, c'est bien, en un sens, parce que nous disons que 2 et 2 font 4, et plus exactement parce que nous calculons ainsi, que 2 et 2 font 4. Comme le soulignent Benacerraf et Putnam dans l'introduction de leur livre, un lecteur peu charitable pourrait, sur la foi de certains passages, accuser Wittgenstein de soutenir qu'il y a des régularités objectives dans le comportement linguistique de l'homme, mais pas dans les événements non-linguistiques...

129. *Bemerkungen*, IV, 46.

efforçons ainsi de « canaliser [130] » son comportement, de remplacer ces appréciations par des remarques comme : « Ceci concorde avec la règle — cela non », mais il ne faut pas oublier que notre sujet doit d'abord former le concept d'un accord avec la règle :

« On n'apprend pas à suivre une règle en apprenant d'abord l'usage du mot « concordance » (*Ubereinstimmung*).

« On apprend bien plutôt la signification de « concorder » en apprenant à suivre une règle.

« Celui qui veut comprendre ce que veut dire : « suivre une règle », doit tout de même pouvoir lui-même suivre une règle [131]. »

On ne peut donc pas dire en toute rigueur qu'une convention admise d'un commun accord donne lieu à la saisie d'une règle; c'est en apprenant à suivre une règle que nous apprenons ce que sont un accord et une convention et que, si l'on veut, nous les réalisons. En d'autres termes, ici non plus il n'y a rien à quoi nous puissions renvoyer comme constituant ce que nous appelons « la règle ». L'acquisition des « notions » en cause est un processus non pas indépendant, mais secondaire et dérivé, par rapport à l'apprentissage des pratiques réglementaires.

Aussi le terme de « conventionalisme » caractérise-t-il au fond assez mal la position de Wittgenstein parce que, comme le remarque Quine, « nous pouvons nous demander ce que l'on ajoute au pur et simple énoncé du fait que les vérités de la logique et des mathématiques sont *a priori*, ou à l'énoncé behavioriste plus simple encore du fait qu'elles sont fermement admises, lorsqu'on les caractérise comme vraies par convention dans un tel sens [132] ». Comme Wittgenstein, pour sa part, n'essaie pas d'ajouter quoi que ce soit, c'est uniquement pour la commodité de l'exposé et eu égard à l'esprit de sa polémique contre les conceptions absolutistes et le platonisme qui les sous-tend, qu'on peut le qualifier de « conventionaliste » [133].

A propos d'expressions comme « apporter *autre chose* », « apporter *la même chose* », Wittgenstein n'hésite pas, par exemple, à affirmer que nous n'utilisons, pour constater l'identité, aucun critère particulier; car il n'est évidemment pas question de dire que le « même », c'est « ce que tous les hommes ou la plupart d'entre eux considèrent comme tel de façon concor-

130. Cf. *Ibid.*, III, 30-33. — 131. *Ibid.*, V, 32.

132. Le sens en question est celui de conventions linguistiques dépourvues de tout caractère délibéré et explicite. Cf. « Truth by Convention », in *Philosophical Essays for A. N. Whitehead*, Otis, H. Lee ed., New York, Longmans, Green & Co., Inc., 1936, et Benacerraf et Putnam, p. 322-345. Voir p. 344-345.

133. Cowan (*op. cit.*), critiquant Dummett, estime que Wittgenstein ne peut être qualifié de « conventionaliste ». Parler en effet, à son sujet, de « conventionalisme », ou même de « behaviorisme », c'est finalement le reconduire à une problématique de « fondation » que toute son entreprise a pour but de récuser. Pour lui, Wittgenstein a effectué pour la déduction un travail destructeur comparable à celui de Hume pour l'induction, et dont le caractère radical a été généralement méconnu par les commentateurs. La philosophie des mathématiques et de la logique qu'il attribue à Wittgenstein est une sorte de « *no-rules-theory* », dont le dernier mot serait, pour reprendre une de ses expressions : « *That's how we do it, that's how it is* » (p. 373). Cf. également E. Riverso, *Il pensiero di Ludovico Wittgenstein*, Libreria Scientifica Editrice, Napoli, chap. VIII, « La matematica senza fondamenti », p. 336, note 30.

dante [134] », nous ne nous référons jamais à une entente de ce genre entre les hommes, lorsque nous affirmons l'identité. Et Wittgenstein ajoute : « Utiliser le mot sans justification ne signifie pas l'utiliser à tort [135] », donnant à entendre que, finalement, ce qui est incompréhensible, c'est que nous nous comprenions [136], autrement dit que nous avons à décrire la pratique linguistique et le fait du consensus sans nous croire obligés de recourir, comme les philosophes politiques, à la fiction juridique d'une « convention » originaire fondatrice, c'est-à-dire, en l'occurrence d'exhiber des « critères » objectifs sur lesquels nous aurions accepté tacitement, pour rendre possible la communication, de régler notre comportement linguistique.

Au total, c'est peut-être encore le terme de « behaviorisme » qui caractériserait le moins mal l'attitude générale de Wittgenstein si l'on tient compte de sa tendance à rapporter invariablement les situations linguistiques les plus diverses à un modèle du type stimulus-réponse, de l'importance exceptionnelle qu'il accorde, en mathématiques et en logique, à la notion d' « opération », au sens behavioriste du terme précisément, et du peu de différence qu'il fait entre l'apprentissage des mathématiques comme technique et l'acquisition sociale de n'importe quel système de réflexes conditionnés culturels par l'éducation [137].

Entre autres « maladies de l'entendement [138] », Wittgenstein s'efforce donc de guérir chez le philosophe celle de l'Absolu, qui est à la base de toutes les entreprises de fondation. Il n'y a en réalité rien d'autre dans les mathématiques que ce que nous y voyons de plus immédiat et qui d'ailleurs rebute généralement le philosophe : un ensemble institutionnel difficile à délimiter et sans unité véritable de techniques symboliques adaptées à certaines de nos préoccupations fondamentales et solidaires de certaines formes d'existence sociale. On ne saurait contester évidemment que la réduction, philosophiquement scandaleuse, de la mathématique à une pure technologie du calcul soit, compte tenu de l'aspect actuel des mathématiques, plus inacceptable aujourd'hui que jamais, et cela d'autant plus que Wittgenstein s'est ôté en fait délibérément toute possibilité d'exclure dogmatiquement, comme étrangère, une partie quelconque du domaine aux contours mal dessinés des mathématiques [139].

134. *Bemerkungen*, V, 33 : cf. *Investigations philosophiques*, 377-382.

135. *Bemerkungen, ibid.*

136. Le problème de la « reconnaissance » (à quoi reconnais-je que quelque chose est rouge?) est un thème central dans les ouvrages postérieurs au *Tractatus*. L'erreur, selon Wittgenstein, est de croire que nous comparons à chaque fois un objet ou une perception avec une sorte de modèle mental.

137. Dans l'article cité, Bernays insiste sur les aspects behavioristes de la philosophie linguistique de Wittgenstein. Voir l'opinion différente de D. Pole dans *The later philosophy of Wittgenstein*, Londres, 1958.

138. Cf. *Bemerkungen*, IV, 53.

139. Il est vrai que, comme il le dit, les mathématiques ont beau constituer une « famille », cela ne signifie pas, pour autant, « qu'il nous sera égal d'y voir admettre n'importe quoi »; et, désignant clairement son ennemi, il ajoute « On pourrait dire : Si tu ne comprenais *aucune* proposition mathématique mieux que tu ne comprends l'Axiome Multiplicatif, alors tu *ne* comprendrais *pas* les mathématiques » (V, 26).

On ne doit cependant oublier à aucun moment que les *Remarques* n'obéissent à aucune préoccupation doctrinale et ne peuvent être questionnées comme un véritable livre. Les affirmations les plus destructrices sont inspirées, chez Wittgenstein, avant tout par le souci polémique et négatif de pourchasser et de détruire, sous tous ses déguisements, l'illusion philosophique du réalisme mathématico-logique, autrement dit de s'opposer par les procédés les plus divers et au besoin les plus outranciers aux entreprises de ce qu'il appelle l' « alchimie mathématique [140] » et dont les prolongements métaphysiques portent les noms de *mathesis universalis*, « ontologie formelle », etc.

Nous nous bornerons, pour notre part, à conclure cet exposé par quelques remarques récapitulatives d'ordre historique et philosophique :

1) Publication posthume, les *Remarques* doivent être rattachées à peu près en totalité à un ensemble de préoccupations, de problèmes et de controverses qui ont beaucoup perdu de leur actualité et par rapport auxquels mathématiciens et épistémologues des mathématiques ont acquis entretemps un recul considérable.

2) On ne peut pas ne pas remarquer en particulier que l'essentiel de la polémique de Wittgenstein contre les recherches fondatrices vise les entreprises logicistes du type des *Principia Mathematica*, et que la physionomie du champ de bataille s'est suffisamment modifiée (dans un sens qui lui a, pour une part, donné raison) pour que ses positions se situent, à certains égards, tout à fait en dehors des lignes.

3) Une partie de l'opinion philosophique est sensible à l'amélioration que représentent, par rapport à la langue usuelle, du point de vue de l'exactitude et de la clarté, les langages symboliques artificiels dont use le logicien. Wittgenstein qui, obnubilé par les prétentions de l'idéographie logiciste, n'a sans doute pas une idée très claire des fonctions respectives réelles du langage formel et du langage naturel dans les sciences mathématico-logiques (notamment, comme on a pu le voir, en ce qui concerne la distinction et les rapports entre langue et métalangue) et prête à tort aux utilisateurs des langues symboliques artificielles l'intention de « substituer » un instrument linguistique « idéal » à d'autres imparfaits, considère, à l'inverse, que l'idéal linguistique est représenté de toute évidence par les langues réelles [141].

140. « Est-ce déjà le fait caractéristique de l'alchimie mathématique, que les propositions mathématiques sont considérées comme des énoncés sur des objets, — et la mathématique, par conséquent, comme l'exploration de ces objets? » (IV, 16).

141. La position de Wittgenstein vis-à-vis de Frege et de Russell est, sur ce point, comparable, dans une certaine mesure, à celle de Cournot vis-à-vis de Condillac et de Leibniz. Cf. l'*Essai sur les fondements de nos connaissances et sur les caractères de la critique philosophique*, 1851 chap. XIV. Wittgenstein et Cournot contestent, chacun à leur manière, la prétendue infériorité des langues vulgaires et la nécessité de remédier à leurs défauts par la constitution d'une langue symbolique idéale. Un projet de « caractéristique universelle », au sens de Leibniz, implique la possibilité de faire correspondre de façon biunivoque aux constituants élémentaires de la pensée ou de la réalité des symboles invariables sur lesquels on puisse « calculer ». Comme on l'a vu, il n'est pas possible, du point de vue du Wittgenstein que nous étudions ici, de se méprendre plus totalement sur la manière dont un langage digne de ce nom « signifie ». Pour un point de vue critique, en ce qui concerne la situation éminente et les responsabilités de Russell dans

4) Au début de son *Introduction à la philosophie mathématique*, Russell attire l'attention sur le fait que l'étude des mathématiques, à partir des éléments les plus familiers de celles-ci, peut être poursuivie dans deux directions opposées. L'une est constructive et va dans le sens d'une complexité croissante; des nombres entiers aux nombres fractionnaires, réels, complexes; des opérations les plus élémentaires, comme l'addition et la multiplication aux plus dérivées, comme la différentiation, l'intégration, etc. L'autre, moins familière, est réductive, elle procède par analyse et va vers une abstraction et une simplicité logique toujours plus grandes; elle correspond à la recherche d'idées et de principes généraux qui permettent de définir ou de déduire les éléments de départ eux-mêmes, et c'est le fait de la suivre de façon préférentielle qui caractérise ce qu'on appelle la philosophie mathématique, par opposition aux mathématiques telles qu'on les enseigne ordinairement [142].

Ici encore, Wittgenstein adopte l'attitude inverse : hostile à la tendance simplificatrice et unitaire qui caractérise la philosophie logiciste des mathématiques, il ne cesse de rappeler au philosophe la nécessité absolue de prendre au sérieux l'extraordinaire variété de l'outillage mathématique et de ses utilisations, sans chercher à retrouver, derrière la multiplicité des techniques en cause, *la* fonction signifiante de ce qui n'est qu'un pseudo-langage.

5) Il y a à coup sûr quelque chose de fondamentalement sain dans l'attitude philosophique de Wittgenstein à l'égard d'un certain nombre de problèmes techniques qui, précisément, ont l'habitude de tourmenter beaucoup les philosophes, comme, par exemple, les fameux « faits de limitation ». Wittgenstein insiste avec raison sur le fait que nous avons affaire uniquement à des limitations instrumentales relatives, que les résultats quelquefois inattendus des recherches sur les systèmes formels n'ont, à vrai dire, absolument rien de « mystérieux », que l'élément de surprise tient uniquement à notre désir de voir les mathématiques suivre des chemins préétablis et se conformer à un modèle que nous leur imposons du dehors, bref qu'il n'y a pas là matière à perplexité philosophique. A propos du théorème de Gödel, les *Remarques* suggèrent à plusieurs reprises une comparaison entre la démonstration d'indémontrabilité formelle et la démonstration de l'impossibilité d'effectuer certaines constructions avec la règle et le compas [143]. Cet élément de prévision et de prévention n'est certes pas dépourvu d'intérêt : il est toujours avantageux de pouvoir décourager (ou tranquilliser) définitivement les obsédés de la quadrature du cercle ou de la trisection de l'angle. Mais peut-être Wittgenstein a-t-il raison d'affirmer :

« Je peux vouloir doter mon calcul d'une espèce déterminée de prévision

l'histoire de la « grammaire philosophique » et la recherche du « langage idéal » à l'époque moderne, cf. M. Black, *Russell's Philosophy of Language*, in *The Philosophy of Bertrand Russell*, ed. by P.A. Schilpp, Harper Torchbooks, Vol. I, p. 229-255.

142. Cf. *Introduction to Mathematical Philosophy*, George Allen and Unwin, 11^e^ éd., 1963, p. 1.; également A.N. Whitehead, *An Introduction to Mathematics*, Oxford, 1911, chap. I.

143. Cf. *Bemerkungen*, I. Anhang I, 13; II, 87.

(*Voraussicht*). Elle ne fait pas de lui un morceau *véritable* de mathématiques, elle en fait peut être un morceau plus utilisable pour une certaine fin [144]. »

Wittgenstein proteste vigoureusement contre le désir qu'il attribue aux métamathématiciens de se donner des assurances *mécaniques* [145] contre la contradiction et la référence abusive au modèle des machines mathématiques (« L'idée de la mécanisation des mathématiques. La mode du système axiomatique [146]. ») Soucieux de préserver contre les logiciens l'aspect de création autonome et imprévisible de l'activité mathématique, il nous invite à maintes reprises à ne pas confondre « la dureté de la règle avec la dureté d'un matériau [147] ». Mais ce que démontrent précisément les résultats dont il a tendance, quoi qu'il en dise, à minimiser l'importance, ce sont les limites de la formalisation et la relative inadéquation du modèle mécanique; ce sont, de plus, ces résultats qui ont déterminé, pour une bonne part, l'abandon des programmes logiciste et formaliste primitifs, contre lesquels il polémique avec tant d'âpreté.

Qu'il ait compris ou non exactement de quoi il retournait, n'est peut-être pas d'une importance capitale pour sa réputation. Le philosophe pourra, du moins, réapprendre en le lisant que, bien qu'il soit entendu que nous faisons des mathématiques depuis plus de vingt-cinq siècles, nous ne savons toujours pas bien au fond ce que sont les mathématiques. (*Novembre* 1967.)

144. *Bemerkungen*, V, 9. — 145. Cf. *Ibid.*, II, 83. — 146. *Ibid.*, V, 9.

147. *Ibid.*, II, 87. L'« anthropologisme » *sui generis* de Wittgenstein implique évidemment, sur le comportement et la fonction de la « machine » à calculer, des idées philosophiques assez particulières qui mériteraient sans doute un examen attentif. Wittgenstein nie, comme on a pu s'en rendre compte, qu'il y ait, en mathématiques, une solidarité aussi étroite qu'on veut bien le dire entre les deux idées de régularité et d'automatisme. Mais, ici encore, il faudrait peut-être disposer d'autre chose que d'allusions éparses pour transformer ses répugnances en théorie. Un progrès décisif a été accompli dans la clarification de la notion d'« effectivité » lorsque les méthodes de calcul effectives ont été caractérisées précisément comme celles pour lesquelles la construction d'une machine à calculer peut être conçue théoriquement, et éventuellement réalisée. Mais, pour Wittgenstein, une procédure mathématique n'est recevable comme telle que dans la mesure où elle peut être « supervisée » et reproduite par un calculateur *humain*. Le refus d'assimiler l'activité mathématique à une quelconque forme d'expérience lui fait dire à maintes reprises que les liaisons causales, physiologiques, psychologiques, mécaniques, etc., n'y jouent aucun rôle. Cf. III, 41 : « ... La *causalité* ne joue aucun rôle dans la démonstration. » ou encore V, 15 : « Dans le calcul *il n'y a pas* de connexions causales... » Entre autres conséquences, il en résulte qu'une calculatrice mécanique (ou électronique), en tant qu'assemblage d'éléments matériels dont les mouvements sont soumis à un déterminisme physique, ne calcule pas réellement, et que, dans la mesure où nous lui reconnaissons la possibilité et le droit de calculer, nous la considérons comme autre chose qu'une machine : « Je veux dire : le travail de la machine mathématique n'est que l'*image* du travail d'une machine. » (III, 48.) Mais de ce que la marche d'un calcul n'a rien à voir avec celle d'un mécanisme et n'est pas *déterminée* comme, par exemple, l'évolution d'un système physique, on ne doit évidemment pas conclure qu'elle est moins contraignante. Ce qui caractérise au contraire la rigidité grammaticale, par opposition à la rigidité d'une pièce mécanique sujette à l'usure et aux déformations, c'est que la première est totale et qu'aucune machine réelle ne peut en donner l'idée (cf. I, 128); mais cela ne l'empêche pas d'être totalement dénuée de fondement.

IMPRIMERIE BUSSIÈRE A SAINT-AMAND. D. L. 1er TR. 1969. N° 2290. 2 (525)